

2024 管理类联考数学基础课讲义

目录

预备知识.....	1
一、充分性判断.....	1
二、条件充分性的判断.....	1
三、条件充分性判断解题方法.....	2
第一章 实数、比与比例、绝对值.....	4
第一节 实数.....	4
一、实数的分类.....	4
二、有理数与无理数.....	4
三、整除.....	5
四、奇数与偶数.....	5
五、质数与合数.....	6
六、倍数与约数.....	6
七、平均数.....	7
例题精练.....	7
第二节 比与比例.....	12
一、定义.....	12
二、比例性质.....	12
三、比例定理.....	12
四、比例运算.....	13
例题精练.....	13
第三节 绝对值.....	14

一、定义.....	14
二、绝对值性质.....	15
三、绝对值三角不等式:	15
例题精练.....	16
第二章 整式与分式.....	19
第一节 整式及其运算.....	19
一、整式定义.....	19
二、整式加减运算.....	19
三、整式乘法运算.....	19
四、整式除法运算.....	20
五、多项式的因式分解.....	20
例题精练.....	21
第二节 分式及其运算.....	26
一、定义.....	26
二、基本性质.....	26
三、运算.....	26
四、解分式方程.....	27
五、分式常见的应用.....	27
例题精练.....	28
第三章 方程、函数与不等式.....	31
第一节 方程与方程组.....	31
一、一元一次方程.....	31

二、一元二次方程.....	31
三、二元一次方程组.....	34
例题精练.....	35
第二节 集合与函数.....	38
一、集合.....	38
二、一次函数.....	39
三、二次函数.....	41
例题精练.....	42
第三节 指、对数函数及其运算.....	45
一、指数与指数函数知识点.....	45
二、对数与对数函数.....	47
例题精练.....	48
第四节 不等式及其解法.....	49
一、不等式的基本性质.....	49
二、一元一次不等式.....	50
三、一元二次不等式.....	50
四、绝对值不等式.....	51
五、求绝对值最值.....	51
六、均值不等式:.....	52
例题精练.....	52
第四章 应用题.....	56
题型一 利润及百分比问题.....	56

例题精练.....	57
题型二 比例问题.....	60
例题精练.....	60
题型三 平均值问题（十字交叉法）.....	62
例题精练.....	63
题型四 溶液问题.....	64
例题精练.....	65
题型五 集合问题.....	66
例题精练.....	67
题型六 工程问题.....	70
例题精练.....	70
题型七 行程问题.....	73
例题精练.....	74
题型八 相对速度问题.....	77
例题精练.....	78
题型九 算术类问题及综合.....	80
例题精练.....	80
第五章 数列.....	84
第一节 数列的概念.....	84
一、数列的概念与通项公式.....	85
二、通项公式 a_n 和前 n 项和 S_n 之间的关系.....	85
例题精练.....	86

第二节 等差数列.....	88
一、等差数列的定义.....	88
二、等差数列的通项公式.....	88
三、下标和定理.....	89
四、等差数列前 n 项和公式.....	90
五、两个等差数列 S_n 之比问题	91
六、等差数列前 n 项和 S_n 的最值.....	91
七、等差数列的判定问题.....	92
八、解决等差数列基本问题的思路:	93
例题精练.....	93
第三节 等比数列.....	96
一、等比数列的定义.....	96
二、等比数列的通项公式.....	96
三、等比数列的下标和定理.....	97
四、等比数列的前 n 项和.....	98
例题精练.....	99
第六章 几何.....	103
第一节 三角形.....	103
一、三角形的性质.....	103
二、特殊三角形.....	104
三、全等三角形.....	107
四、相似三角形.....	107

例题精练.....	108
第二节 四边形.....	112
一、四边形的内角和等于 360° ;	112
二、平行四边形的性质.....	112
三、特殊的平行四边形.....	113
四.梯形.....	113
例题精练.....	114
第三节 圆与扇形.....	117
一、圆.....	117
二、扇形.....	118
例题精练.....	118
第四节 空间几何.....	121
一、长方体.....	121
二、圆柱.....	122
三、球体.....	123
例题精练.....	123
第五节 平面解析几何.....	125
一.两点之间距离公式.....	126
二.中点坐标公式.....	126
三. 直线的倾斜角与斜率.....	126
四.直线的方程.....	126
五.两直线的位置关系.....	127

六.点到直线的距离公式.....	127
七.点线之间的对称问题.....	127
八.圆的两种方程.....	128
九.点和圆、直线和圆、圆和圆的位置关系.....	128
例题精练.....	130
第七章 数据分析.....	135
第一节 排列组合.....	135
一、计数原理.....	135
二、排列与排列数.....	136
三、组合与组合数.....	136
四、二项式定理.....	137
五、排列组合常见题型.....	140
第二节 概率初步.....	149
一、基本概念：.....	149
二、古典概型.....	149
三、独立事件.....	150
四、贝努利概型.....	151
例题精练.....	152
第三节 数据分析.....	154
一、众数、中位数.....	154
二、方差和标准差.....	154
三、统计图表.....	155

例题精练.....	157
-----------	-----

预备知识

一、充分性判断

两个数学命题 A、B, 若由条件 A 成立, 就可以推出结论 B 成立(即 $A \Rightarrow B$ 是真命题), 则 A 是 B 的充分条件, 即 A 具备了使 B 成立的充分性。若由 A 不能推出 B, 则称 A 不是 B 的充分条件, 即 A 不具备使 B 成立的充分性。

例如: A 为: $x > 0, y > 0$ B 为: $xy > 0$

当 $x > 0, y > 0$, 即 A 成立时, 必有 $xy > 0$, 即 B 成立, 故 A 是 B 的充分条件。反之, B 成立, 则 A 不一定成立, 故 B 不是 A 成立的充分条件。

二、条件充分性的判断

此类题的求解, 要求判断所给出的条件能否充分支持题干中陈述的结论, 阅读条件(1), (2)后作出选择。

(A) 条件(1)充分, 但条件(2)不充分;

(B) 条件(2)充分, 但条件(1)不充分;

(C) 条件(1)和(2)单独都不充分, 但条件(1)和(2)联合起来充分;

(D) 条件(1)充分, 条件(2)也充分;

(E) 条件(1)和(2)单独都不充分, 条件(1)和(2)联合起来也不充分。

条件(1)	条件(2)	选项
√	×	A
×	√	B
×	×	C

(1)+(2) ✓		
✓	✓	D
×	×	E
(1)+(2) ×		

三、条件充分性判断解题方法

方法一（自下而上）：将条件中的参数分别代入题干中验证。特点是至少运算两次。

实际解题当中，95%以上条件充分性题目需要自下而上的解题方法。

方法二（自上而下）：先不看条件，假设题干中命题正确，求出参数。然后将条件中参数范围与题干成立的参数范围进行比较，若条件范围落入题干成立范围之内，则充分。特点是一次运算。

例 1. $x^2 - 3x - 4 = 0$

(1) $x = -1$ (2) $x = 2$

【答案】A.

解析：

解方程 $x^2 - 3x - 4 = 0$,

$$(x-4)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 4, x_2 = -1$$

则条件（1）充分，条件（2）不充分，故选 A。

例 2. 能确定 $m - n = -1$

$$(1) \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{是二元一次方程组} \begin{cases} mx+ny=8 \\ nx-my=1 \end{cases} \text{的解;}$$

$$(2) m,n \text{满足} \begin{cases} 2m+n=16 \\ m+2n=17 \end{cases}$$

【答案】B.

解析：

$$\text{条件(1), 代入 } x,y \text{ 得: } \begin{cases} 2m+n=8 \\ 2n-m=1 \end{cases}; \text{解方程得: } \begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}, m-n=1, \text{ 不充分;}$$

$$\text{条件(2), 方程组} \begin{cases} 2m+n=16 \\ m+2n=17 \end{cases}, \text{两式相减得: } m-n=-1, \text{ 充分}$$

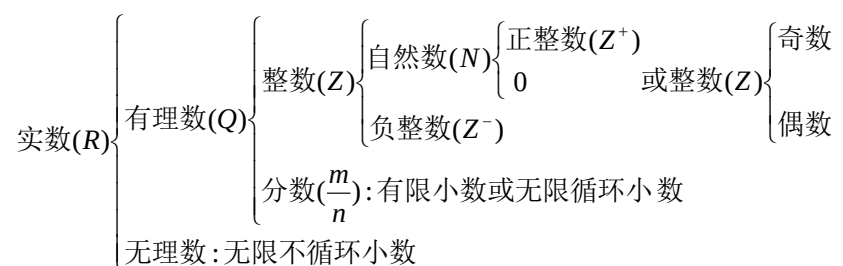
则条件(1)不充分, 条件(2)充分, 故选 B。

第一章 实数、比与比例、绝对值

第一节 实数

知识精讲

一、实数的分类



二、有理数与无理数

1. 定义

(1) 有理数：整数和分数统称为有理数.

(2) 无理数：无限不循环小数统称为无理数，包括正无理数和负无理数.

2. 常见的无理数有：

(1) 无限不循环小数：如圆周率 $\pi=3.1415 \cdots$ ，自然常数 $e=2.7182 \cdots$.

(2) 开不尽的根号：如 $\sqrt{2}$.

(3) 取不尽的对数：如 $\log_2 3$.

注 1：无理数比较复杂，不过我们在考试中往往只会遇到圆周率 π 、以及开不尽的根号这两类无理数.

注 2：分数一定是有理数——若能除尽则是有限小数，若除不尽则一定是循环小数.

3. 有理数与无理数的混合运算

- (1) 有理数之间的加减乘除运算，结果必为有理数；
- (2) 有理数与无理数之间的加减运算，结果必为无理数；
- (3) 非零有理数与无理数之间的乘除运算，结果必为无理数；
- (4) 无理数之间的加减乘除运算，结果不确定。

推论 1: 已知 a 是有理数， λ 是无理数，若 $a\lambda$ 是有理数，则 $a=0$ 。

推论 2: 已知 a 、 b 是有理数， λ 是无理数，若 $a+b\lambda=0$ ，则 $a=b=0$ 。

三、整除

1. 整除的定义: 如果自然数 a 除以非零整数 b ，余数为 0，则称 a 能被 b 整除，或 b 能整除 a 。

例: $\frac{6}{2}=3$ ，余数为 0，因此 6 能被 2 整除，或 2 能整除 6。

2. 整除的特征

能被 2 整除的数: 个位为偶数，0，2，4，6，8。

能被 3 整除的数: 各位数字之和必能被 3 整除。

能被 5 整除的数: 个位为 0 或 5。

能被 9 整除的数: 各位数字之和必能被 9 整除。

能被 10 整除的数: 个位必为 0。

四、奇数与偶数

1. 定义: 不能被 2 整除的整数为奇数，反之为偶数。

注意: 0 为偶数，-1，-3 是奇数；-2，-4 是偶数。且两个相邻的整数必为一奇一偶。

2. 奇数与偶数的混合运算

奇数 $\pm$ 奇数 = 偶数；奇数 $\pm$ 偶数 = 奇数；偶数 $\pm$ 偶数 = 偶数；

奇数 $\times$ 奇数=奇数；奇数 $\times$ 偶数=偶数；偶数 $\times$ 偶数=偶数；

注意：关于奇偶数运算的问题通常从“有偶数参加的乘法一定等于偶数”这个角度入手.

五、质数与合数

1. 定义

质数：只有 1 和它本身两个因数的正整数叫做质数（也称素数）.

例：2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...

合数：除了 1 和它本身外，还有其他因数的正整数叫做合数.

例：4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15...

2. 性质

（1）质数、合数的研究范围是正整数，所以 1 既不是质数也不是合数；

（2）2 是唯一的偶质数；

（3）4 是最小的合数.

注意：除了 2，其他质数都是奇数，所以关于质数、合数运算的问题一定跟 2 有关，例：

a 、 b 都是质数，且 $a+b$ 是奇数，那么可以知道 a 和 b 有一个是 2.

六、倍数与约数

1. 倍数、约数

当 a 能被 b 整除时，则 a 为 b 的倍数， b 为 a 的约数.

2. 公因数与最大公因数

如果整数 b 既是整数 a 的因数，同时也是整数 c 的因数，则称 b 为 a 和 c 的公因数. 公因数中最大的一个称作这两个数的最大公因数.（公因数只有 1 的两个数称为：互质，如 3 和 5）

3. 公倍数与最小公倍数

如果整数 b 能被整数 a 整除, 同时也能被整数 c 整除, 则称 b 为 a 和 c 的公倍数. 公倍数中最小的一个称作这两个数的最小公倍数.

4. 定理: 两个整数的乘积等于两数的最大公因数和最小公倍数的乘积.

5. 最大公因数和最小公倍数的求法——短除法.

例: 求 42 与 48 的最大公因数和最小公倍数: 先找 42 与 48 的公因数 2, 商为 21、24; 再找 21 和 24 的公因数 3, 商为 7、8; 由于 7 和 8 互质, 则短除法结束. 在短除法结束后, 左侧的 2×3 就是最大公因数, 左侧和下方数相乘 $2 \times 3 \times 7 \times 8 =$ 就是最小公倍数.

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 42 & 48 \\ 3 & 21 & 24 \\ \hline & 7 & 8 \end{array}$$

七、平均数

(1) 算术平均值: n 个实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的算术平均值为 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ 。

(2) 几何平均值: n 个正实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的几何平均值为 $x_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ 。

注意: 几何平均值只对正实数有定义, 而算术平均值对任何实数都有定义。

例题精练

1. 如果 m 、 n 是自然数, 那么下列各数当中, 一定是偶数的是 ()。

A. $2m + 3n$ B. $2m + 3n^2$ C. $(m + n)^2$ D. $2m - 4n$ E. $m - 2n$

【答案】D.

解析:

能被 2 整除的整数为偶数，如果 m, n 是自然数，则 $2m, 2n, 4m, 4n$ 必为偶数；

$m, n, 3m, 3n$ 不确定奇偶性。

根据奇数与偶数的混合运算可知，偶数-偶数=偶数

因此 $2m-4n$ 一定是偶数， D 选项符合题意。

2. 已知 a, b 均为质数， $a+b$ 为奇数，那么 a, b 中必有一个数为 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 5

【答案】C.

解析：

根据奇数与偶数的混合运算可知，奇数+偶数=奇数；因为 $a+b$ 为奇数，所以 a, b 中必有一个数为偶数；

又因为 2 是唯一的偶质数，所以 a, b 中必有一个数为 2， C 选项符合题意。

3. 几个质数的乘积是 210，那么它们的和是 ()

A. 17 B. 22 C. 26 D. 23 E. 以上都不正确

【答案】A.

解析：

因为质数是只有 1 和它本身两个约数的正整数，首先将 210 分解质因数(就是除以质数)

由上式可知， $210=2\times 5\times 3\times 7$

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 210} \\
 3 \overline{) 105} \\
 5 \overline{) 35} \\
 7
 \end{array}$$

所以，几个质数的乘积是 210，他们的和是 $2+5+3+7=17$ ，选项 A 符合题意。

4. 在 10 以内的质数中，两个质数之和还是质数的共有（ ）种。

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

【答案】B.

解析：

质数定义是：大于 1 的整数，如果它的正因数只有 1 和它本身，则称这个整数为质数。

依据质数定义列出 10 以内的质数：2、3、5、7

则满足质数之和为质数的情况： $2+3=5$ 和 $2+5=7$ ，所以符合题意的选项为 B。

5. 把 48 块糖和 38 块巧克力平均分给同一组同学，结果糖剩 3 块，巧克力剩 2 块，最多有（ ）名同学。

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9 E. 10

【答案】D.

解析：

已知 48 块糖剩余 3 块，那么分配的数应为 $48-3=45$ 块；

38 块巧克力剩余 2 块，那么分配的数应为 $38-2=36$ 块；

分给同一组学生，则分配的人数相同，因此求这个组最多的人数，即求 45 和 36 的最大公约数。

将 45 和 36 进行因式分解可得

$$45=3\times 3\times 5$$

$$36=3\times 3\times 2\times 2$$

因此, 45 与 36 的最大公约数为 $3\times 3=9$, D 选项符合题意。

$$\begin{array}{r|rr} 3 & 45 & 36 \\ \hline 3 & 15 & 12 \\ \hline & 5 & 4 \end{array}$$

6. 设 n 为自然数, 被 10 除余数是 9, 被 9 除余数是 8, 被 8 除余数是 7, 已知 $100 < n < 1000$,

这样的数有 () 个.

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2 E. 1

【答案】D.

解析:

n 被 10 除余数是 9, 所以 $n+1$ 能被 10 整除

n 被 9 除余数是 8, 所以 $n+1$ 能被 9 整除

n 被 8 除余数是 7, 所以 $n+1$ 能被 8 整除

10 和 9 的最小公倍数为 90

90 和 8 的最小公倍数为 360

所以 10, 9, 8 的最小公倍数是 360

100 到 1000 当中, 只有 360 和 720 是 360 的倍数

所以 n 只可能是 359 和 719, 选 D

7. (2019) 设 n 为正整数, 则能确定 n 除以 5 的余数

(1) 已知 n 除以 2 的余数 (2) 已知 n 除以 3 的余数

【答案】E

【解析】

常规方法:

单独显然不充分;

联合两个条件, 已知 n 除以 2 的余数只能是 1, 则 n 可能是 1、3、5、7、9、11、13、15、17 等等; 已知 n 除以 3 的余数, 可能是 1 或 2, 则 n 可能是 1 或 2、4 或 5、7 或 8、10 或 11、13 或 14 等等. 联合仍然无法确定 n 除以 5 的余数.

技巧:

例如除以 2 余 1, 除以 3 也余 1 的有 7, 13, 19, 25, 但是除以 5 的余数不确定。

8. $a = b = 0$

(1) a 、 b 为有理数, 且 $a + b = 0$ (2) a 、 b 为有理数, 且 $a + b\sqrt{2} = 0$

【答案】B.

解析:

条件(1)举反例, 当 $a = -1$, $b = 1$ 时, $a + b = 0$ 不充分;

条件(2): 根据有理数与无理数质检的混合运算可知, 有理数与无理数运算得到有理数, 只有唯一一种情况: $0 \times \text{无理数} = 0$, 于是可得到推论:

已知 a , b 是有理数, λ 是无理数, 若 $a + b\lambda = 0$, 则 $a = b = 0$, 因此条件(2)充分 (这是个定理可以直接记住, 以后方便做题使用)

B 选项符合题意。

第二节 比与比例

知识精讲

一、定义

1. 比与比值的定义. (1) a 、 b 两数相除, 称为这两个数的比, 即 $a:b = \frac{a}{b}$.

(2) 若 a 、 b 两数相除的商为 k , 则称 k 为 $a:b$ 的比值.

2. 比例的定义

当两个比的的比值相等时, 我们称其为比例. 例如 $2:1=4:2$, $a:b=c:d$.

若 $a = kb$ (k 不为零), 则称 a 与 b 成正比, k 为比例系数;

若 $a = \frac{k}{b}$ (k 不为零), 则称 a 与 b 成反比, k 为比例系数.

二、比例性质

比例外项之积=比例内项之积.

$$1. a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc;$$

$$2. a:b=b:d \Leftrightarrow b^2=ad.$$

三、比例定理

$$1. \text{更比定理: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

$$2. \text{等比定理: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}; \quad (b+d+f \neq 0)$$

注意: 所有分母都要保证不等于 0, 所以在使用等比定理时, 要先讨论分母之和是否为 0.

四、比例运算

(1) 设 k 法

利用比例条件，将实数的比设为 k ，进而引出其他参数。

例：若实数 a, b, c 满足 $a:b:c=1:2:3$ ，则设 $a=k, b=2k, c=3k$ 。

(2) 比例定理法

利用比例定理进行求解。

例：若 $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{a} = k$ ，则 k 的值为（ ）。

此题适用于等比定理求解。使用等比定理时，要先判断分母之和是否为 0，因此需进行以下讨论：

1) $a+b+c=0$ 时， $a+b=-c$ ，代入原式得 $k=-2$ ；

2) $a+b+c \neq 0$ 时，由等比定理

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{a} = \frac{(a+b-c)+(a-b+c)+(-a+b+c)}{a+b+c} = k,$$

解得 $k=1$ 。

例题精练

1. 甲、乙两仓库储存的粮食重量之比为 4:3，现从甲库中调出 10 万吨粮食，则甲、乙两仓库存粮吨数之比为 7:6。甲仓库原有粮食的万吨数为（ ）

A. 70 B. 78 C. 80 D. 85 E. 以上结论均不正确

【答案】C。

解析：

假设甲仓库原有粮食为 $4k$ 万吨，那么调出粮食后两仓库的数量比： $\frac{4k-10}{3k} = \frac{7}{6}$ ，解得：

$k=20$ ，所以原来甲仓库的粮食吨数为： $4k=80$ 。

2. 若实数 a, b, c , 满足 $a:b:c=1:2:5$, 且 $a+b+c=24$, 则 $a^2+b^2+c^2=(\quad)$

- A. 30 B. 90 C. 120 D. 240 E. 270

【答案】E.

解析: 满足 $a:b:c=1:2:5$, 那么假设 $a=k, b=2k, c=5k(k \neq 0)$, 可得

$$a+b+c=8k=24, \text{ 解得 } k=3, \text{ 便得到 } a=3, b=6, c=15, \text{ 可得 } a^2+b^2+c^2=270,$$

所以符合题意的选项为 E。

技巧: 由已知比例可知 a 占 $\frac{1}{8}$, b 占 $\frac{2}{8}$, c 占 $\frac{5}{8}$, 则 $a=24 \times \frac{1}{8}=3$, $b=24 \times \frac{2}{8}=6$,

$c=24 \times \frac{5}{8}=15$, 所以 $a^2+b^2+c^2=270$. 故选 E.

3. 甲与乙的比是 3:2, 丙与乙的比是 2:3, 则甲与丙的比是 $(\quad)$.

- A. 1:1 B. 3:2 C. 2:3 D. 9:4 E. 8:5

【答案】D.

解析: 设甲为 $3k$, 乙为 $2k$ 。

因为丙: 乙=2:3, 所以丙为 $\frac{3}{4}k$, 甲与丙的比为 $3k: \frac{3}{4}k=9:4$, D 选项符合题意。

第三节 绝对值

知识精讲

一、定义

1. 数轴

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫数轴; 在直线上任取一个点表示 0, 这个点叫

做原点；通常规定直线上从原点向右（或上）为正方向，从原点向左（或下）为负方向。

2. 绝对值

（1）定义：在数轴上表示一个数的点离原点的距离就叫做这个数的绝对值。

（2）几何意义： $|a|$ 表示在数轴上 a 点与原点 0 的距离， $|a-b|$ 表示在数轴上 a 点与 b 点的距离， $|a+b|$ 表示数轴上点 a 与点 $-b$ 的距离。

$$(3) \text{ 代数意义: } |a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

二、绝对值性质

1. 非负性： $|a| \geq 0$ ，任何实数 a 的绝对值非负。

2. 对称性： $|-a| = |a|$ ； $|a-b| = |b-a|$ ，互为相反数的两个实数的绝对值相等。

$$3. \text{ 自比性: } \frac{|a|}{a} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} +1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$$

注意：绝对值的自比性通常与以下性质结合考查：

（1）若 $abc > 0$ ，则三个数都为正，或两负一正；（2）若 $abc < 0$ ，则三个数都为负，或两正一负。

4. 等价性

$$(1) \text{ 根号与平方: } \sqrt{a^2} = |a|$$

$$(2) \text{ 去绝对值: } |a|^2 = |a^2| = a^2$$

三、绝对值三角不等式：

$$|a+b| \leq |a| + |b| (ab \geq 0 \text{ 时等号成立}), |a-b| \leq |a| + |b| (ab \leq 0 \text{ 时等号成立}).$$

证明方法：用绝对值的几何意义画出数轴显然可得。

记忆方法：把 $|a+b|$ 、 $|a|$ 、 $|b|$ 当成三角形的三条边，两边之和大于第三边。

例题精练

1. 如果 a, b, c 满足 $abc < 0$ ，那么 $\frac{|ab|}{ab} + \frac{|ac|}{ac} + \frac{|bc|}{bc} = (\quad)$

- A. 1 B. 1 或 -3 C. -3 D. -1 或 -3 E. -1 或 3

【答案】E.

解析：

满足 $abc < 0$ ，则 a, b, c 中负数的个数需为奇数个，即有以下两种情况：

(1) a, b, c 取值为1负2正，则 ab, ac, bc 中必有两数为负数，即原方程 $= -1 - 1 + 1 = -1$ 。

(2) a, b, c 取值均为负，则 ab, ac, bc 均为正数，即原方程 $= 1 + 1 + 1 = 3$ 。

综上所述，原方程取值可能为-1 或 3，E选项符合题意。

2. 已知 $-3 \leq t \leq 6$ ，则 $|t+4| + |t-6| = (\quad)$ 。

- A. $2t-2$ B. 10 C. 3 D. $2t+2$ E. $2t$

【答案】B.

解析：

已知 $-3 \leq t \leq 6$ ，根据此范围，将 $|t+4| + |t-6|$ 去绝对值得 $(t+4) + [-(t-6)] = t+4+6-t=10$ ，B选项符合题意。

3. 若实数 a, b, c 满足 $|a-2| + (b+3)^2 + \sqrt{c+6} = 0$ ，那么 $\frac{c}{ab}$ 的值是 $(\quad)$ 。

- A. 1 B. 2 C. 3 D. -3 E. -2

【答案】A.

解析:

此题为非负性问题,即若干个非负性之和为零,则每个均为0,一般与绝对值、根号、平方相关。

此题若满足 $|a-2|+(b+3)^2+\sqrt{c+6}=0$, 则需满足
$$\begin{cases} a-2=0 \\ b+3=0 \\ c+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=6 \end{cases}$$

所以, $\frac{c}{ab} = \frac{-6}{2 \times (-3)} = 1$, A 选项符合题意

4. 已知 $|a|=5$, $|b|=7$, $ab < 0$, 则 $|a-b| = (\quad)$.

A. 2 B. -2 C. 12 D. -12

【答案】C.

解析:

要求 $ab < 0$, 可能的情况为:

(1) $a > 0$, $b < 0$, 取值为 $a=5$, $b=-7$, 那么 $|a-b|=a-b=12$;

(2) $a < 0$, $b > 0$, 取值为 $a=-5$, $b=7$, 那么 $|a-b|=b-a=12$,

综上所述: $|a-b|=12$

5. 设实数 a, b 满足 $|a-b|=2$, $|a^3-b^3|=26$, 则 $a^2+b^2=(\quad)$

A. 30 B. 22 C. 15 D. 13 E. 10

【答案】E.

解析:

由 $|a^3-b^3|=26$, 可得: $|(a-b)(a^2+ab+b^2)|=26$

又因为 $|a-b|=2$, 可得: $|a^2+ab+b^2|=13$

由 $|a-b|=2$, 可得 $a^2-2ab+b^2=4$, $ab=\frac{(a^2+b^2)-4}{2}$, 代入上式

$\left|a^2+\frac{(a^2+b^2)-4}{2}+b^2\right|=13$, 设 $a^2+b^2=x$, 则 $\left|x+\frac{x}{2}-2\right|=13$

因为 $x>0$, 可得: $x=10$

第二章 整式与分式

第一节 整式及其运算

知识精讲

一、整式定义

在有理式中没有除法运算或有除法运算但除式中不含字母的式子叫整式. 整式包括单项式和多项式, 其和、差、积仍为整式.

二、整式加减运算

1. 几个整式相加减, 有括号的先去括号, 然后合并同类项. 整式加法满足交换律、结合律和对乘法的分配律. 例如:

$$(a^2 + ab) - (4ab + a^2 - b^2) = a^2 + ab - 4ab - a^2 + b^2 = b^2 - 3ab$$

2. 整式加减法的运算步骤: (1) 去括号 (2) 合并同类项

注意: 去括号时一定要注意符号的处理.

三、整式乘法运算

整式乘法的运算步骤: (1) 一个因式的每一项乘以另一个因式的每一项 (2) 合并同类项.

$$(a+n)(b+m) = ab + am + nb + nm$$

注意: 乘积中的任一项, 都是每个因式多项式中各取一项相乘, 再合并同类项后的结果.

【必备基本公式】

$$(1) a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(2) (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(3) (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \quad (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

$$(4) a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(5) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

四、整式除法运算

1. 带余除法

被除式 $F(x)$ 除以 $f(x)$ ，商为 $g(x)$ ，余式为 $r(x)$ ，则有 $F(x) = f(x)g(x) + r(x)$ 。

当 $F(x)$ 能被 $f(x)$ 整除时， $F(x) = f(x)g(x)$ ， $r(x)$ 为零，否则 $r(x)$ 至少比 $f(x)$ 低一次。

2. 余式定理（非整除）

由于余式的次数要小于除式，因此当除式为一次表达式时，余式为常数。

即， $F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 除以一次因式 $(x-a)$ 所得的余数一定是 $F(a)$ 。

3. 因式定理（整除）

$F(x)$ 含有因式 $(x-a)$ （即整除），则 $F(a) = 0$

五、多项式的因式分解

把一个多项式表示成几个整式之积的形式，叫做多项式的因式分解。多项式因式分解的常用方法如下：

方法一：提取公因式法。

例如： $ax + bx + cx = x(a + b + c)$

方法二：公式法（乘法公式的逆运用）。

例：考试中常见以下三种情况：

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2, \quad x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2, \quad x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

方法三：十字相乘法.

二次三项式的十字相乘法

$$x^2 + px + q = (x+a)(x+b), \text{ 其中 } p = a+b, q = ab$$

$$ax^2 + bx + c = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2), \text{ 其中 } a = a_1a_2, c = c_1c_2, \text{ 并且 } b = a_1c_2 + a_2c_1.$$

例：将 $3x^2 - 2x - 8$ 因式分解

解：二次项的系数分解为 $3 = 1 \times 3$ ，常数项 $-8 = -2 \times 4$ ，交叉相乘后

$$3 \times (-2) + 1 \times 4 = -2, \quad -2 \text{ 为一次项系数.}$$

$$\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ & \times \\ 1 & -2 \end{array}$$

$$\text{所以 } 3x^2 - 2x - 8 = (x-2)(3x+4)$$

方法四：求根法

若方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ 有 n 个根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则多项式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n).$$

注意：

涉及到因式分解的问题，首先考虑首尾项检验法！即：原式最高次项系数，一定等于各

因式的最高次项系数之积；原式的常数项，一定等于各因式常数项之积。

例题精练

1. 计算 $(a+b)(2a+b)$ ，结果正确的是 ()

A. $2a^2 + 3ab + b^2$ B. $a^2 + 3ab + 2b^2$ C. $2a^2 + ab + b^2$ D.

$2a^2 + 3ab + 2b^2$ E. 以上都不对

【答案】A.

解析:

$$\begin{aligned}(a+b)(2a+b) &= a(2a+b) + b(2a+b) \\ &= 2a^2 + ab + 2ab + b^2 \\ &= 2a^2 + 3ab + b^2\end{aligned}$$

故选 A

2. 将 $x^2 - 2x - 3$ 因式分解为 ()

- A. $(x-1)(x+3)$ B. $(x-1)(x-3)$ C. $(x+1)(x-3)$
D. $(x+1)(x+3)$ E. $x(x-1)+3$

【答案】C.

解析:

$$\begin{aligned}\text{假设: } x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ \text{解得 } x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 12}}{2} = 1 \pm 2 \\ \text{得 } x_1 &= 3, x_2 = -1 \\ \text{所以: } x^2 - 2x - 3 &= (x-3)(x+1)\end{aligned}$$

故选 C

3. 已知 $a+b=10$, $ab=20$, 则 $a^3+b^3=(\quad)$

- A. 200 B. 400 C. 600 D. 800 E. 1000

【答案】B.

解析: 因为 $a+b=10$,

$$\text{所以 } (a+b)^2 = 100 = a^2 + b^2 + 2ab$$

因为 $ab=20$

$$\text{所以 } a^2+b^2+2ab=100$$

$$a^2+b^2+40=100$$

$$a^2+b^2=60$$

$$\text{因为 } a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$\text{所以 } a^3+b^3=10 \times (60-20)=400, B \text{ 选项符合题意}$$

$$4. \text{ 设 } x=2+\sqrt{3}, y=2-\sqrt{3}, \text{ 则 } x^3+y^3=(\quad)$$

$$A. 52 \quad B. -52 \quad C. 26 \quad D. -26 \quad E. 48$$

【答案】52.

解析:

$$\text{利用公式 } x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

将 $x=2+\sqrt{3}, y=2-\sqrt{3}$ 代入上式, 得

$$x^3+y^3=(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})[(2+\sqrt{3})^2-(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})^2]$$

$$=4 \times [4+4\sqrt{3}+3-(4-3)+(4-4\sqrt{3}+3)]$$

$$=4 \times (4+4\sqrt{3}+3-1+4-4\sqrt{3}+3)$$

$$=4 \times 13$$

$$=52$$

$$5. \text{ 如果 } a^2+b^2+2a+4b+5=0, \text{ 则 } ab=(\quad)$$

$$A. 1 \quad B. 2 \quad C. -1 \quad D. -2 \quad E. 4$$

【答案】B.

解析:

将原式配方

$$\begin{aligned}
 & a^2 + b^2 + 2a + 4b + 5 \\
 &= (a^2 + 2a + 1) + (b^2 + 4b + 4) \\
 &= (a+1)^2 + (b+2)^2 = 0
 \end{aligned}$$

利用完全平方的非负特性，得 $\begin{cases} a+1=0 \\ b+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$

所以 $ab = (-1) \times (-2) = 2$ ，故选 B

6. 若 $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a+b+c)^2$ ，则 a, b, c 三者关系为 ()

A. $a-b=b+c$ B. $a+b+c=1$ C. $a=b=c$ D. $ab+bc=ac$ E.
 $abc=1$

【答案】C.

解析：

利用公式 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ 得

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) = 0$$

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$$

三个非负的数相加为 0，则三个数必为 0.

$$\text{所以 } \begin{cases} a-b=0 \\ a-c=0 \\ b-c=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c, \text{ 选项 } C \text{ 符合题意}$$

7. 多项式 $x^3 + ax^2 + bx - 6$ 的两个因式是 $x-1$ 和 $x-2$ ，则第三个一次因式为 ()

- A. $x-6$ B. $x-3$ C. $x+1$ D. $x+2$ E. $x+3$

【答案】B.

解析:

$$\text{设 } f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6 = (x-1)(x-2)(x+m)$$

由多项式的常数项为-6, 所以 $(-1) \times (-2)m = -6$, 因此 $m = -3$, 第三个一次因是为 $(x-3)$

故选 B

8. 代数式 $5x^3 + mx^2 + x + 5$ 除 $x+1$, 余式是 5, 则 $m = (\quad)$

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

【答案】E.

解析:

因为 $5x^3 + mx^2 + x + 5$ 除以 $x+1$, 余式是 5

所以当 $x+1=0$ 时: $5x^3 + mx^2 + x + 5 = 5$

即 $x=-1$ 时: $5x(-1)^3 + m(-1)^2 - 1 + 5 = 5 \Rightarrow m = 6$ 故选 E

9. 已知代数式 $x^3 + x^2 - mx + 1$ 能被 $x-1$ 整除, 那么 $m = (\quad)$

- A. 1 B. -1 C. -2 D. -3 E. 3

【答案】E.

解析:

已知代数式 $x^3 + x^2 - mx + 1$ 能被 $x-1$ 整除, 根据因式定理可得, 当 $x=1$ 时

$x^3 + x^2 - mx + 1 = 0$, 代入得: $1+1-m+1=0$, $m=3$, 故选 E。

10. 若 $x^3 + x^2 + ax + b$ 能被 $x^2 - 3x + 2$ 整除, 则 $(\quad)$

- A. $a=4, b=4$ B. $a=-4, b=-4$ C. $a=10, b=-8$ D. $a=-10, b=8$ E. $a=-2, b=0$

【答案】D.

解析:

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, 因此 $x=1, x=2$ 为 $x^3 + x^2 + ax + b$ 的两个根

$$\text{即: } \begin{cases} 1+1+a+b=0 \\ 8+4+2a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-10 \\ b=8 \end{cases}$$

故选 D

第二节 分式及其运算

知识精讲

一、定义

若 A 、 B 表示两个整式，且 $B \neq 0$ ， B 中含有字母，则称 $\frac{A}{B}$ 是分式. 分子和分母没有正次数的公因式的分式，称为最简分式（或既约分式）.

二、基本性质

分式的分子和分母同乘以（或除以）同一个不为零的式子，分式的值不变，即有

$$\frac{A}{B} = \frac{mA}{mB} (m \neq 0)$$

分式的基本性质主要应用在分式的通分和约分上. 分式运算的最终结果如果仍为分式，此分式必须通过约分化为最简分式.

三、运算

1. 加减运算

同分母的几个分式相加减，分母不变，分子相加减；不同分母的几个分式相加减，取这几个分式分母的公分母作分母，通分后化为同分母分式的加减运算. 例如：

$$\frac{2a+3b}{a+b} - \frac{a^2+3ab+b^2}{a(a+b)} = \frac{2a^2+3ab-a^2-3ab-b^2}{a(a+b)} = \frac{(a+b)(a-b)}{a(a+b)} = \frac{a-b}{a}$$

分式加法满足交换律、结合律和对乘法的分配律.

2. 乘除运算

几个分式相乘，运算法则是分子乘分子，分母乘分母. 分式的乘法运算满足交换律、结合律

和对加减法的分配律. 两个分式相除，将除式的分子分母颠倒位置变为乘法运算. 例如：

$$\frac{a+c}{a+b} \div \frac{a-c}{b+c} = \frac{a+c}{a+b} \cdot \frac{b+c}{a-c}$$

四、解分式方程

1. 分式方程的解法：解分式方程的关键是去分母，将分式方程转化为整式方程.

2. 分式方程的增根问题：

增根的产生：分式方程本身隐含着分母不为 0 的条件，当把分式方程转化为整式方程后，所求的根可能恰好是使原方程中分母的值 0，那么就会出现不适合方程的根（增根），要舍掉.

验根：因为解分式方程可能出现增根，所以解分式方程必须进行检验.

五、分式常见的应用

1、形如已知 $x + \frac{1}{x} = a$ 或 $x^2 - ax + 1 = 0$ ，求高次代数式的问题.

整理成 $x^2 = ax - 1$ 形式，代入整式，迭代降次即可.

2、裂项相消法：常用于当题干中出现多个分数求和的情况。

$$\text{原理：} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$$

例题精练

1. $\frac{a^2+2ab+b^2}{ab-b^2} \div \frac{ab+b^2}{a^2-2ab+b^2} = (\quad)$

- A. $\frac{(a+b)(a-b)}{b}$ B. $\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{b^2}$ C. $\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{b}$ D. $\frac{(a+b)(a-b)}{b^2}$
E. 以上都不对

【答案】D.

解析:

利用完全平方公式得, $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$; $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

利用提公因式法得, $ab-b^2=b(a-b)$; $ab+b^2=b(a+b)$

$$\text{所以原式} = \frac{(a+b)^2}{b(a-b)} \div \frac{b(a+b)}{(a-b)^2} = \frac{(a+b)^2}{b(a-b)} \times \frac{(a-b)^2}{b(a+b)} = \frac{(a+b)(a-b)}{b^2}$$

D选项符合题意.

2. 已知 $x^2-3x-1=0$, 则多项式 $3x^3-11x^2+3x+3$ 的值为 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2 E. 3

【答案】C.

解析:

由已知条件 $x^2-3x-1=0$ 得: $x^2=3x+1$, $x^3=3x^2+x=3(3x+1)+x=10x+3$

$$\begin{aligned} \text{代入得: } 3x^3-11x^2+3x+3 &= 3(10x+3)-11(3x+1)+3x+3 \\ &= 30x+9-33x-11+3x+3=1 \end{aligned}$$

故选 C.

3. 设 x 是非零实数, 则 $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$

(1) $x + \frac{1}{x} = 3$; (2) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$.

【答案】A.

解析:

条件(1) $x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 7$

$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}) = 3 \times 6 = 18$

条件(1)充分. 条件(2)明显 x 有正负之分, 不充分.

4. 若 $x + \frac{1}{x} = 3$, 则 $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = (\quad)$

A. $-\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$ E. $\frac{1}{8}$

【答案】E.

解析:

将原式的分子分母同除 x^2 , 得

$$\frac{1}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2 + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x + \frac{1}{x^2} - 1} = \frac{1}{(x + \frac{1}{x})^2 - 1} = \frac{1}{3^2 - 1} = \frac{1}{8}$$

E选项符合题意.

5. 求代数式 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} = (\quad)$

A. $\frac{6}{7}$ B. $\frac{7}{8}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{3}{4}$ E. 以上都不对

【答案】A.

解析:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}
\end{aligned}$$

故选 A.

6. 已知 $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \cdots + \frac{1}{(x+9)(x+10)}$, 则 $f(8) = (\quad)$

A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{16}$ D. $\frac{1}{17}$ E. $\frac{1}{18}$

【答案】E.

解析:

根据裂项相消原理:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+10} \right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+10} \\
\therefore f(8) &= \frac{1}{9} - \frac{1}{18} = \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

故选 E.

第三章 方程、函数与不等式

第一节 方程与方程组

知识精讲

方程的概念：含有未知数的等式.

方程的性质一：在方程两边同时做同样的运算（如：加一个数、乘一个数、平方），方程依然成立.

方程的性质二——移项：把一个数由方程的一边移到另一边时，符号需要改变.

$$\text{例：} 2x-1=x+2, \text{ 移项得到：} 2x-x=2+1 \Rightarrow x=3$$

一、一元一次方程

1. 引例

$$\text{解方程：} 2x+1=7$$

$$\text{解：} 2x+1=7 \Rightarrow 2x=7-1=6 \quad \text{解得 } x=3$$

2. 定义

含有一个未知数且未知数的最高次数为一次的方程称为一元一次方程，其标准形式为：

$$ax+b=0(a \neq 0), \text{ 该方程的解为 } x=-\frac{b}{a};$$

二、一元二次方程

$$\text{1. 引例：解方程 } x^2-2x-3=0$$

2. 定义：含有一个未知数且未知数的最高次数为二次的方程称为一元二次方程，其

$$\text{标准形式为：} ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$$

3. 一元二次方程解法

(1) 配方法. 引例: 解方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$

第一步: $x^2 - 2x = 3$

第二步两边各加个 1, 以方便左边的式子配方: $x^2 - 2x + 1 = 3 + 1$

第三步配方: $(x-1)^2 = 4$

第四步: 两边同时开方, $x-1=2$ 或 $x-1=-2$

第五步: 解得 $x_1 = 3, x_2 = -1$

(2) 因式分解法

把方程化为形如 $a(x-x_1)(x-x_2)=0(a \neq 0)$ 的形式, 则解为 $x=x_1$ 或 $x=x_2$.

例: 解方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$

解: $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0$, 解得 $x_1 = 3, x_2 = -1$

(3) 公式法

利用求根公式解一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$ 可得 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

其中, 判别式 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$,

当 $\Delta > 0$ 时有两个不同的根, $\Delta = 0$ 时有一个根 (两个相等的根), $\Delta < 0$ 时, 没有根.

例: $x^2 - 2x - 3 = 0$, 对应 $ax^2 + bx + c = 0$ 可得 $a=1, b=-2, c=-3$, 这时将 a, b, c

的值代入求根公式 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, 化简得 $x_1 = 3, x_2 = -1$.

【易错点】

易错点 1: 使用公式法时方程必须写成标准形式, 即等号右侧为 0.

例: 方程 $x^2 + mx + n = p$ 中, $a=1, b=m, c=n-p$

易错点 2: 方程有两个根等价于 “ $\Delta \geq 0$ ” (因为当 $\Delta = 0$ 时方程有两个相等的根); 方程有两不等实根、两相异实根等价于 “ $\Delta > 0$ ”

4. 韦达定理

已知一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根分别是 x_1 和 x_2 , 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

例: $x^2 - 2x - 3 = 0$ 对应 $ax^2 + bx + c = 0$, 可得 $a = 1, b = -2, c = -3$, 这时

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2 \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -3$$

韦达定理应用: 在不解出方程的根的情况下, 就可以求有关方程根的一些代数式的值.

韦达定理在考试中常见以下 4 种形式:

$$(1) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$$

$$(2) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

$$(3) \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2}$$

$$(4) |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$$

5. 根的分布或位置

利用韦达定理, 方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有根的情况有以下几种:

$$(1) \text{ 方程有两个正根 } \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}; \quad (2) \text{ 有两个负根 } \begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$$

$$(3) \text{ 一正一负根 } \begin{cases} x_1 \cdot x_2 < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}.$$

三、二元一次方程组

1、定义

定义：形如 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ (其中 a_1 与 b_1 , a_2 与 b_2 分别不同时为零) 的方程组, 称为二元一次方程组.

二元一次方程组是由两个二元一次方程, 组成的. 如方程组: $\begin{cases} x - 3y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

这两个二元一次方程的公共解就是该二元一次方程组的解.

2、二元一次方程组的解法

引例：解方程组 $\begin{cases} x - 3y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

(1) 加减消元法

$$\begin{cases} x - 3y = -7 & (1) \\ 2x + y = 0 & (2) \end{cases}$$

第一步： $3 \times (2)$ 得： $6x + 3y = 0$ (3)

第二步：将(1)和(3)两个等式, 左右分别相加得： $7x = -7$, 解出 $x = -1$,

第三步：将 $x = -1$ 代入(1)中 得 $y = 2$

所以该方程组的解为 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$.

检验：将 $x = -1$, $y = 2$ 代入(2)中, 等式成立.

(2) 代入消元法

$$\begin{cases} x - 3y = -7 & (1) \\ 2x + y = 0 & (2) \end{cases}$$

第一步：由(1)得 $x = 3y - 7$ (3)

第二步：将(3)中的 $x = 3y - 7$ 代入(2)中 得 $2(3y - 7) + y = 0$, 整理解得 $y = 2$

第三步：将 $y=2$ 带回 (1) 中 解得 $x=-1$ ，所以该方程组的解为 $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ 。

例题精练

1. 解一元二次方程： $x^2-2x-1=0$ ， $x=(\quad)$

A. ± 1 B. $1 \pm \sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} \pm 1$ D. 1 E. $\pm \sqrt{2}$

【答案】B.

解析：

$x^2-2x-1=0$ ，直接用求根公式： $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ， $a=1, b=-2, c=-1$ ，

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$ ， $x = 1 \pm \sqrt{2}$ ，故选 B。

2. 已知 x_1, x_2 是方程 $x^2-ax-1=0$ 的两个实数根，则 $x_1^2+x_2^2=(\quad)$

A. a^2+2 B. a^2+1 C. a^2-1 D. a^2-2 E. $a+2$

【答案】A.

解析：

利用韦达定理

$$\begin{cases} x_1+x_2=a \\ x_1 \cdot x_2=-1 \end{cases}$$

平方和公式展开 $x_1^2+x_2^2=(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2+2$

3. 若方程 $x^2+px+37=0$ 恰好有两个正整数解 x_1 和 x_2 ，则 $\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p}$ 的值为 $(\quad)$

A. -2 B. -1 C. $-\frac{1}{2}$ D. 1 E. 2

【答案】A.

解析:

利用韦达定理

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = 37 \end{cases}$$

$\because x_1$ 和 x_2 为正整数, $x_1 \cdot x_2 = 37$, 37 为质数, 所以由质数性质得, 两根为 $x_1 = 1$, $x_2 = 37$,

或 $x_1 = 37$, $x_2 = 1$

$$\therefore x_1 + x_2 = 38 = -p \Rightarrow p = -38, \quad \frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p} = \frac{2 \cdot 38}{-38} = -2$$

A 选项符合题意.

4. 设 $a^2 + 1 = 3a$, $b^2 + 1 = 3b$, 且 $a \neq b$, 则代数式 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的值为 ()

A. 5 B. 10 C. 9 D. 11 E. 7

【答案】E.

解析:

$$\begin{cases} a^2 + 1 = 3a \\ b^2 + 1 = 3b \end{cases} \Rightarrow (\text{用 } x \text{ 替换}) x^2 + 1 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

因为 $a \neq b$, 所以 a 和 b 为方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两个根. 由韦达定理得 $a \cdot b = 1$, 所以 a 、 b 互为倒数.

$$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2} + a^2 = \left(\frac{1}{a^2} + 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot a + a^2 \right) - 2 \cdot \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a^2} + 2 + a^2 \right) - 2 = \left(\frac{1}{a} + a \right)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

5. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (k-1)x - 3k - 2 = 0$ 的两个实数根的平方和是 17, 则 $k =$

()

A. -10 B. -6 C. 2 D. -6 或 2 E. ± 6

【答案】C.

解析:

$$x^2 - (k-1)x - 3k - 2 = 0$$

$a=1$, $b=k-1$, $c=-3k-2$, 利用韦达定理

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = k-1 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -3k-2 \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (k-1)^2 - 2(-3k-2) = 17$$

$$k^2 + 4k - 12 = 0, \text{ 得 } k_1 = -6, k_2 = 2$$

$$\text{当 } k = -6 \text{ 时, 原式} = x^2 - (-6-1)x - 3(-6) - 2 = x^2 + 7x + 16 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 < 0$$

$\therefore$ 方程无实根

$$\text{当 } k = 2 \text{ 时, 原式} = x^2 - (2-1)x - 3 \cdot 2 - 2 = x^2 - x - 8 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) > 0, \text{ 成立.}$$

C选项符合题意.

$$6. \text{ 方程组 } \begin{cases} x+y=a \\ y+z=4 \\ z+x=2 \end{cases} \text{ 有整数解.}$$

$$(1) a=1 \quad (2) a=0$$

【答案】B.

解析:

条件充分判断(思路: 下推上, 将 a 代入)

$$(1) a=1 \text{ 时 } \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=4 \\ z+x=2 \end{cases} \text{ 解方程组, 得 } x=-\frac{1}{2} \text{ 不充分.}$$

$$(2) a=0 \text{ 时 } \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=4 \\ z+x=2 \end{cases} \text{ 解方程组, 得 } x=-1 \text{ 充分.}$$

B 选项符合题意.

第二节 集合与函数

知识精讲

一、集合

1. 定义

某些确定的且互不相同的对象集在一起就成为集合. 组成集合的对象叫做元素. 用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合; 用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示元素.

元素与集合的关系主要有属于 $\in$, 不属于 $\notin$ 两种. 记作 $a \in A$ 或 $a \notin A$.

2. 几种集合的命名

空集: 不包含任何元素的集合叫做空集, 用 $\emptyset$ 表示.

自然数集: N 正整数集: N^* 或 N_+ 整数集: Z ;

有理数集: Q ; 实数集: R .

3. 集合的表示方法

(1) 列举法: 把元素一一列举在大括号内表示集合, 例如: $\{a, b, c\}$.

(2) 描述法: 有两种描述方式

第一种代号描述: 例如, 方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的所有解组成的集合, 可表示为 $\{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$. 第二种文字描述: 将说明元素性质的一句话写在大括号内. 例如, $\{\text{大于2小于5的整数}\}$;

(3) 韦恩图法: 用图形表示集合定义了两个集合之间的四种关系

(4) 集合的区间表示

$\{x|a < x < b\}$ 可表示为 $x \in (a, b)$

$\{x|a \leq x < b\}$ 可表示为 $x \in [a, b)$

$\{x|a < x \leq b\}$ 可表示为 $x \in (a, b]$

$\{x|a \leq x \leq b\}$ 可表示为 $x \in [a, b]$

4. 集合之间的关系

(1) 子集: 如果属于 A 的所有元素都属于 B, 那么 A 就叫做 B 的子集, 记作: $A \subseteq B$, 如图 1-1 所示.

真子集: 如果所有属于 A 的元素都属于 B, 而且 B 中至少有一个元素不属于 A, 那么 A 叫做 B 的真子集, 记作 $A \subset B$.

真子集也是子集, 和子集的区别之处在于 $A \neq B$. 对于同一个集合, 其真子集的个数比子集少一个.

常用结论: 由 n 个元素组成的集合, 有 2^n 个子集, 有 $2^n - 1$ 个真子集;

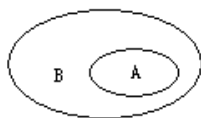


图 1-1

(2) 交集: 由两个集合的公共元素组成的集合, 叫做这两个集合的交集, 记作 “ $A \cap B$ ”, 读作 “A 交 B”, 如图 1-2 所示.

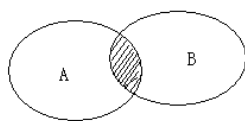


图 1-2



图 1-3

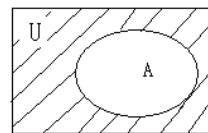


图 1-4

(3) 并集: 由两个集合所有元素组成的集合, 叫做这两个集合的并集, 记作 “ $A \cup B$ ”, 读作 “A 并 B”, 如图 1-3 所示.

(4) 补集: 由所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做 A 在全集 U 中的补集, 记作 “ $C_U A$ ”, 读作 “A 补”, 如图 1-4 所示.

常用结论: $A \subseteq B$ 的等价形式主要有: $A \cap B = A$, $A \cup B = B$

二、一次函数

1、一次函数和正比例函数:

一般地, 形如 $y = kx + b$ (k, b 是常数, $k \neq 0$) 的函数叫做一次函数; 当 $b = 0$ 时, $y = kx$

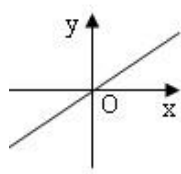
叫做正比例函数.

例如: $y = 2x$ 是正比例函数, $y = x + 1$ 是一次函数

2、一次函数的图像:

① 正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图像是经过原点 $(0,0)$ 的一条直线;

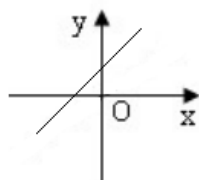
通常画正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图像时只需取一点 $(1, k)$, 然后过原点和这一点画直线即可.



② 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图像是一条直线, 通常也称为直线 $y = kx + b$.

由于两点确定一条直线, 所有只需要画出两点再连成直线就可以了.

例: 一次函数 $y = x + 1$ 我们可以取坐标轴上的两点 $(0,1)$ 和 $(-1,0)$



总结: 为了方便, 常用一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图像与坐标轴的两个交点 $(0, b)$ 和

$\left(-\frac{b}{k}, 0\right)$ 来画图像.

③ 对一次函数 $y = kx + b$ 中的系数 k, b 的理解:

直线 $y = kx + b$ 中 k 的符号表示直线的方向, b 是直线与 y 轴交点的纵坐标.

3、一次函数与一元一次方程

直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 与 x 轴交点的横坐标是一元一次方程 $kx + b = 0$ 的解.

三、二次函数

1、表达式

举例：二次函数（一般式） $y = 2x^2 + 4x - 6$ ，也可以写成顶点式 $y = 2(x+1)^2 - 8$ 或者交点式 $y = 2(x-1)(x+3)$

二次函数的表达式有

(1) 一般式： $y = ax^2 + bx + c$

(2) 顶点式： $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$

(3) 交点式： $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

2、系数 a, b, c 的意义

(1) a 决定开口方向，当 $a > 0$ ，抛物线开口向上；当 $a < 0$ ，抛物线开口向下；

(2) 由二次函数的顶点式可得，对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$ ， a 和 b 的正负决定对称轴在 y 轴的左侧或右侧。 $b = 0$ 时，对称轴即 y 轴。

注：关于二次函数主要的考点是对称轴、以及求二次函数的最值，根据函数图像可知二次函数在对称轴处取得最值，所以需要牢记对称轴的公式。

例：二次函数 $y = -x^2 + 4x + 2000$ 的最大值是多少？因为二次函数对称轴为 $x = 2$ ，所以当 $x = 2$ 时取得最大值，此时 $y = -4 + 8 + 2000 = 2004$

(3) c 表示抛物线在 y 轴的截距，即抛物线与 y 轴的交点为 $(0, c)$ 。

$c > 0$ ，抛物线与 y 轴交于正半轴； $c < 0$ ，抛物线与 y 轴交于负半轴； $c = 0$ ，抛物线过原点。

(4) $\Delta = b^2 - 4ac$ 决定抛物线与 x 轴交点的个数.

$\Delta > 0$ 两个交点; $\Delta = 0$ 一个交点, 即顶点落在 x 轴; $\Delta < 0$ 无交点.

例题精练

1. 集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 的子集个数为 ()

A. 14 B. 15 C. 16 D. 18 E. 以上都不对

【答案】C

解析:

集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 中包含 4 个元素

所以, 集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 的子集个数是 $2^4 = 16$.

C 选项符合题意.

2. 若集合 $P = \{1, 2, 3, m\}$, $Q = \{m^2, 3\}$, 满足, $P \cap Q = Q$ 求 m 的值.

A. 0, 1 B. 0, -1 C. 0, -1, $\sqrt{2}$ D. 0, -1, $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ E. 以上都不对

【答案】D

解析: $\because P \cap Q = Q \quad \therefore Q \subseteq P$

$\therefore m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$ 或 $m^2 = 2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$ 或 $\therefore m^2 = m \Rightarrow m = 0$ 或 1

$\because m \neq 1, 2, 3 \quad \therefore m = -1, \pm\sqrt{2}$ 或 0 D 选项符合题意.

3. 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = 1$, 且过点 $(-1, 1)$, 则 ()

A. $b = -2, c = -2$ B. $b = 2, c = 2$ C. $b = -2, c = 2$ D. $b = -1, c = -1$ E.

$b = 1, c = 1$

【答案】A

解析:

$$\text{对称轴 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2} = 1, \therefore b = -2$$

原函数为 $y = x^2 - 2x + c$, 过点 $(-1, 1)$ 代入,

$$1 = (-1)^2 - 2(-1) + c$$

$$1 = 1 + 2 + c \Rightarrow c = -2$$

A 选项符合题意.

4. 直线 $y = ax + b$ 过第二象限.

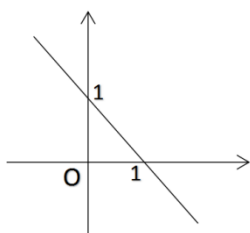
$$(1) a = -1, b = 1 \quad (2) a = 1, b = -1$$

【答案】A.

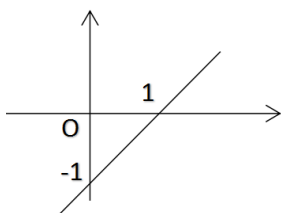
解析:

条件充分性判断, 下推上

(1) $a = -1$ 的一次函数, 图像单调递减: $b = 1$, 上移如图. 所以经过第二象限, (1) 充分.



(2) $a = 1$ 的一次函数, 图像单调递增: $b = -1$, 下移如图. 不经过第二象限, (2) 不充分.



A 选项符合题意.

5. 直线 $y = ax + b$ 与抛物线 $y = x^2$ 有两个交点.

(1) $a^2 > 4b$ (2) $b > 0$

【答案】B.

解析:

$\because$ 直线与抛物线有两个焦点 $\therefore x^2 = ax + b \Rightarrow x^2 - ax - b = 0$

$\because$ 有两个交点 $\therefore$ 方程有 2 个不相等实根 $\Delta = (-a)^2 - 4 \times 1 \times (-b) = a^2 + 4 > 0$.

(1) $a^2 > -4b$ $\therefore$ (1) 不充分

(2) a^2 非负性, $a^2 + 4b$ 一定大于 0 $\therefore$ (2) 充分

B 选项符合题意.

6. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 则方程 $f(x) = 0$ 有两个不同实根.

(1) $a + c = 0$ (2) $a + b + c = 0$

【答案】A.

解析:

$f(x) = a^2 + bx + c$, $f(x) = 0 \Rightarrow a^2 + bx + c = 0$ 有两个不等实根.

$\therefore b^2 - 4ac > 0$

(1) $a = -c$ 代入 $\Delta b^2 + 4a^2 > 0$, $\because a \neq 0$ (二次函数) $\therefore$ (1) 充分.

(2) $b = -a - c$ 代入 $\Delta = (-a - c)^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = (a - c)^2 \geq 0$, (2) 不充分.

A 选项符合题意.

7. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 则能确定 a, b, c 的值

(1) 曲线 $f(x)$ 过点 (0,0) 和 (1,1)

(2) 曲线 $f(x)$ 与 $y = a + b$ 相切

【答案】C.

解析:

(1) $f(0) = c = 0, f(1) = a + b + c = 0$, 无法解出 a, b 的唯一值, 所以(1)不充分.

(2) 相切, 则 $ax^2 + bx + c = a + b \Rightarrow ax^2 + bx + c - a - b = 0$ 有一个根, 所以

$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4a(c - a - b) = 0$ 无法解出唯一值.

条件(1)与条件(2)联立
$$\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ b^2 - 4a(c - a - b) = 0 \end{cases}$$
 三个方程三个未知数, 可求出唯一解.

C选项符合题意.

第三节 指、对数函数及其运算

知识精讲

一、指数与指数函数知识点

1. 指数的基本概念

(1) 根式的概念

① 一般地, 如果 $x^n = a$, 则 $x = \sqrt[n]{a}$, 那么 x 叫做 a 的 n 次方根, 其中 $n \in N^*$;

② 当 n 是奇数时, $\sqrt[n]{a^n} = a$;

当 n 是偶数时, $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$;

(2) 分数指数幂的两个定义公式:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \text{ 例如: } 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5};$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ 例如: } 5^{-2} = \frac{1}{5^2};$$

(3) 有理指数幂的运算性质

$$\textcircled{1} a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \quad a^r \div a^s = a^{r-s};$$

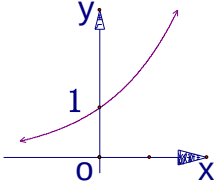
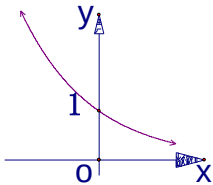
$$\textcircled{2} (a^r)^s = a^{rs};$$

$$\textcircled{3} (ab)^r = a^r b^r.$$

2. 指数函数的概念

(1) 一般地, 函数 $y = a^x (a > 0, \text{且} a \neq 1)$ 叫做指数函数, 其中 x 是自变量;

(2) 指数函数的图象和性质

$a > 1$	$0 < a < 1$
	
定义域 $\mathbb{R}$	
值域 $y > 0$	
在 $\mathbb{R}$ 上单调递增	在 $\mathbb{R}$ 上单调递减

函数图象都过定点 $(0, 1)$

二、对数与对数函数

1. 对数的基本概念与对数的公式

(1) 对数的定义式: $a^x = N \Leftrightarrow \log_a N = x$ ($a > 0, a \neq 1, N > 0$)

举例 $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$;

(2) 对数恒等式

$$\textcircled{1} \log_a a = 1; \quad \textcircled{2} \log_a 1 = 0$$

(3) 对数和与差公式

$$\textcircled{1} \log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N; \quad \textcircled{2} \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

$$\textcircled{3} \log_a M^x = x \cdot \log_a M;$$

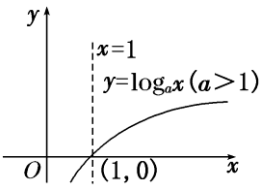
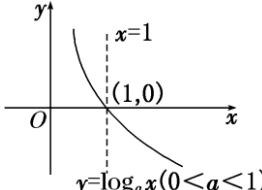
(4) 常用对数与自然对数:

$$\textcircled{1} \text{常用对数 } \log_{10} N \text{ 记为 } \lg N; \quad \textcircled{2} \text{自然对数 } \log_e N \text{ 记为 } \ln N;$$

2. 对数函数

函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 叫做对数函数, 其中 x 是自变量.

图象与性质见下图:

		$a > 1$	$0 < a < 1$
图像			
性质	定义域	$(0, +\infty)$	
	值域	R	
	过定点	$(1, 0)$	
	函数值的变化	当 $0 < x < 1$ 时, $y < 0$ 当 $x > 1$ 时, $y > 0$	当 $0 < x < 1$ 时, $y > 0$ 当 $x > 1$ 时, $y < 0$
	单调性	是 $(0, +\infty)$ 上的增函数	是 $(0, +\infty)$ 上的减函数

例题精练

1. 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$ 的值域为()

- A. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ D. $(0, 2]$ E. $(0, 2)$

【答案】D.

解析:

由二次函数的性质有 $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \in [-1, +\infty)$

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$, 由指数函数的性质得 $y_{\max} = 2$, 所以其值域为 $(0, 2]$

D选项符合题意.

2. 函数 $f(x) = \log_a(x-1) + 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点()

- A. $(1, 1)$ B. $(2, 1)$ C. $(1, 0)$ D. $(2, 0)$ E. $(2, 2)$

【答案】B.

解析: 由对数函数图像可知, 对数函数 $f(x) = \log_a x$ 所过定点为 $(1, 0)$. 令 $x-1 = 1$, 即 $x = 2$, $\log_a(x-1) = 0$, $\therefore$ 函数 $f(x) = \log_a(x-1) + 1$ 的图象过定点 $(2, 1)$.

B选项符合题意.

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x & x > 0 \\ 3^x & x \leq 0 \end{cases}$ 则 $f\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right] = (\quad)$

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 1 D. 3 E. 9

【答案】A.

解析:

$\because x > 0$ 时, $f(x) = \log_2 x$, $\therefore f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = -2$. 又 $\because x < 0$ 时, $f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$,

$\therefore f\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right] = f(-2) = \frac{1}{9}$.

A 选项符合题意.

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \log_a(x+1) & x > 0 \\ x^2 + ax + b & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $f(3) = 2$, $f(-2) = 0$, 则 $b = (\quad)$

- A. 0 B. -1 C. 1 D. 2 E. 3

【答案】A.

解析:

$\because f(3) = \log_a 4 = 2$, $\therefore a = 2$.

$\because f(-2) = 4 - 2a + b = 4 - 4 + b = 0$, $\therefore b = 0$.

A 选项符合题意.

第四节 不等式及其解法

知识精讲

一、不等式的基本性质

1. $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$;

$a > b, d < 0$, 则 $ad < bd$; 例 $3 > 2$, 则 $3 \times (-2) < 2 \times (-2)$, 即 $-6 < -4$.

注意: 不等式的移项规则与方程的移项规则完全相同. 不等式最大的特点在于, 不等式两边同时乘以负数时, 需要改变不等号的方向, 这个性质是不等式最大的易错点, 务必小心.

2、传递性: $a > b, b > c \Rightarrow a > c$;

3、同向相加性: $a > b, c > d$, 则有 $a + c > b + d$;

4、皆正乘方性: $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n > 0$ (n 为正整数);

二、一元一次不等式

1、一元一次不等式的解法

$$ax > b (a \neq 0) \begin{cases} a > 0 \text{ 时} & x > \frac{b}{a} \\ a < 0 \text{ 时} & x < \frac{b}{a} \end{cases}$$

2、一元一次不等式组的解法

分别求出不等式组的每个一元一次不等式的解集后, 再求这些解集的交集.

注: 取交集的规则——同大取大、同小取小. 或者通过数轴画图确定.

$$\text{例: } \begin{cases} x > 1 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow x > 3, \begin{cases} x < 1 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow x < 1$$

三、一元二次不等式

1、一元二次不等式的标准形式为:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (a > 0)$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad (a > 0)$$

注意: 一元二次不等式的标准形中, 二次项的系数为正.

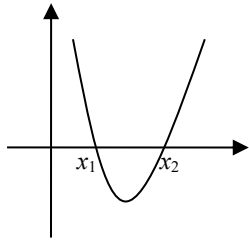
2、一元二次不等式与方程和函数的关系

(1) 设方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 有两个不等实根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则

$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $x < x_1$ 或 $x > x_2$;

$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $x_1 < x < x_2$.

(2) 我们也可以通过结合二次函数图像来解题, $ax^2+bx+c>0$ 可以理解成,
 $y=ax^2+bx+c$ ($\Delta>0$) 这个函数, y 大于 0 的时候, x 的范围. 如下图, 我们可以看出
 来 $x<x_1$ 或 $x>x_2$ 的时候, y 的值在 x 轴上方, 即 $y>0$. 同理 $y<0$, 即图像在 x 轴下方,
 这时, x 的范围是 $x_1<x<x_2$.



四、绝对值不等式

不等式 $|x|<a$ ($a>0$) 的解集是 $\{x|-a<x<a\}$;

不等式 $|x|>a$ ($a>0$) 的解集是 $\{x|x>a, \text{ 或 } x<-a\}$

不等式 $|ax+b|<c$ ($c>0$) 的解集为 $\{x|-c<ax+b<c\}$ ($c>0$);

不等式 $|ax+b|>c$ ($c>0$) 的解集为 $\{x|ax+b<-c, \text{ 或 } ax+b>c\}$ ($c>0$)

五、求绝对值最值

(1) 常规方法: 分段讨论法去绝对值符号, 根据图像判断最值。

(2) 终极方法: 描点看边取拐点法, 拐点是指使绝对值为零的 x 的取值。

例: 设 $y=|x-2|+|x+2|$, 则下列结论正确的是 ()

- A. y 没有最小值
- B. 只有一个 x 使 y 取到最小值
- C. 有无穷多个 x 使 y 取到最大值
- D. 有无穷多个 x 使 y 取到最小值

E. 以上选项均不正确

六、均值不等式:

当 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为 n 个正实数时, 它们的算术平均值不小于它们的几何平均值, 即

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n} \quad (x_i > 0, i=1, \dots, n)$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ 时, 等号成立.

常考以下两个模型:

1. 两个正数的均值不等式: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 即 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$;
2. 三个正数的均值不等式: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ 即 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

例题精练

1. 不等式 $(x+2)(1-x) > 0$ 的解集是 ()

- A. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 1\}$ B. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$ C. $\{x | -2 < x < 1\}$
D. $\{x | -1 < x < 2\}$ E. 以上都不对

【答案】C.

解析:

解不等式 $(x+2)(1-x) > 0 \Rightarrow -(x+2)(x-1) > 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) < 0 \Rightarrow -2 < x < 1$

C选项符合题意.

2. 在区间 $(0, +\infty)$ 上, 函数 $y = \frac{12}{x^2} + 3x$ 的最小值为 ().

- A. 9 B. 6 C. 3 D. 12 E. 1

【答案】A.

解析： 利用均值不等式，

$$y = \frac{12}{x^2} + 3x = \frac{12}{x^2} + \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} \geq 3 \times 3 \sqrt{\frac{12}{x^2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2}} = 9 \text{ (当且仅当 } \frac{12}{x^2} = \frac{3x}{2} = \frac{3x}{2} \text{ 时, 取最小值)}$$

A 选项符合题意.

3. 设 $A = \{x | |x-2| < 3\}$, $B = \{x | |x-1| > 1\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

A. $\{x | -1 < x < 0 \text{ 或 } 2 < x < 5\}$ B. $\{x | -1 < x < 5\}$ C. $\{x | -1 < x < 0\}$

D. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$ E 以上都不对

【答案】A.

解析：

$$|x-2| < 3 \Rightarrow x-2 < 3 \text{ 或 } 2-x < 3, \therefore -1 < x < 5$$

$$|x-1| > 1 \Rightarrow x-1 > 1 \text{ 或 } 1-x > 1, \therefore x > 2 \text{ 或 } x < 0$$

$$\therefore A \cap B = \{x | -1 < x < 0 \text{ 或 } 2 < x < 5\}$$

A 选项符合题意.

4. 不等式 $x^2 + x + k > 0$ 恒成立，则 k 的取值范围是 ()

A. $k < 0$ B. $k > 0$ C. $k < \frac{1}{4}$ D. $k > \frac{1}{4}$ E. 以上都不对

【答案】D.

解析：

不等式 $x^2 + x + k > 0$ 恒成立，则抛物线 $y = x^2 + x + k$ 在 x 轴上方，与 x 轴无交点.

$$\Rightarrow x^2 + x + k = 0 \text{ 无实根, 即 } \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times k < 0 \Rightarrow 1 - 4k < 0 \Rightarrow k > \frac{1}{4}.$$

D 选项符合题意.

5. 不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解集为 A ，不等式 $x^2 + x - 6 < 0$ 的解集为 B ，不等式

$x^2 + ax + b < 0$ 的解集是 $A \cap B$, 那么 $a + b$ 等于 ()

- A. -3 B. 1 C. -1 D. 3 E. 2

【答案】A.

解析: 不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 3 \Rightarrow$ 集合 $A = \{x | -1 < x < 3\}$

不等式 $x^2 + x - 6 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+3) < 0 \Rightarrow -3 < x < 2 \Rightarrow$ 集合 $B = \{x | -3 < x < 2\}$

$$A \cap B = \{x | -1 < x < 2\}, \therefore x^2 + ax + b < 0 = (x+1)(x-2) < 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2$$

$\therefore a = -1, b = -2, a + b = -3$, A 选项符合题意.

$$6. (2x^2 + x + 3)(-x^2 + 2x + 3) < 0 \quad ()$$

$$(1) x \in [-3, -2]; (2) x \in (4, 5)$$

【答案】D.

解析:

由于 $y = 2x^2 + x + 3$ 恒大于 0, (因为 $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 24 < 0$), 故

$$(2x^2 + x + 3)(-x^2 + 2x + 3) < 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \text{ 或}$$

$x < -1$, 条件(1)和条件(2)均充分.

D 选项符合题意.

$$7. \text{ 设 } a, b \text{ 为非负实数, 则 } a + b \leq \frac{5}{4} \quad ()$$

$$(1) ab \leq \frac{1}{16}; (2) a^2 + b^2 \leq 1$$

【答案】C.

解析:

本题需要看条件(1)和条件(2)是否可以使 $a + b \leq \frac{5}{4}$ 成立. 下面分别计算:

条件(1), 反例: 令 $a=2, b=\frac{1}{64}, a+b=2\frac{1}{64}>\frac{5}{4}$, 不充分;

条件(2), 反例: 令 $a=b=\frac{2}{3}$, 则 $a^2+b^2\leq 1, a+b=\frac{4}{3}>\frac{5}{4}$, 不充分;

故条件(1)和条件(2)单独都不充分, 所以把条件(1)和条件(2)联合起来看:

联(1)(2)联合得, $a^2+b^2+2ab\leq 1+\frac{1}{16}\times 2, (a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leq \frac{9}{8}<\frac{25}{16}$, 即 $a+b\leq \frac{5}{4}$ 。

故联合充分。

C选项符合题意。

8. $f(x)$ 有最小值 2.

$$(1) f(x)=\left|x-\frac{5}{12}\right|+\left|x-\frac{1}{12}\right|;; \quad (2) f(x)=|x-2|+|4-x|。$$

【答案】B.

解析:

临界点处取最值, 条件(2)充分, 选 B。

第四章 应用题

题型一 利润及百分比问题

【方法与技巧】

(1) **变化率概念:** $\text{变化率} = \frac{\text{变化量}}{\text{变前量}} \times 100\% = \frac{|\text{现值} - \text{原值}|}{\text{原值}} \times 100\%$

举例: 设 1 月销售量为 a , 2 月比 1 月增长 $p\%$, 则现值 $= a(1 + p\%)$, 3 月比 1 月下降 $p\%$, 则现值 $= a(1 - p\%)$.

举例: 设 1 月销售量为 1000, 2 月销售量为 1200, 则变化率 $\frac{1200 - 1000}{1000} \times 100\% = 20\%$.

(2) 利润问题

① 利润 = 售价 - 进价 (成本);

② 利润率 $= \frac{\text{利润}}{\text{成本 (进价)}} \times 100\% = \frac{\text{售价} - \text{成本}}{\text{成本}} \times 100\% = \left(\frac{\text{售价}}{\text{成本}} - 1 \right) \times 100\%$;

③ 售价 = 成本 + 利润 = 成本 $\times (1 + \text{利润率})$.

(3) **连续增长问题:** 一月份产值为 a . 以后每月比上月增长 $p\%$, 则十二月份产值

$a(1 + p\%)^{11}$, 全年产值为 $a + a(1 + p\%) + \cdots + a(1 + p\%)^{11}$ (等比数列求和)

推导过程:

1 月份产值为 a ,

2 月份比 1 月份增长 $p\%$, 则 2 月份产值为 $a(1 + p\%)$,

3 月份比 2 月份增长 $p\%$, 则 3 月份产值为 $a(1 + p\%)(1 + p\%) = a(1 + p\%)^2$

.....

12 月份比 11 月份增长 $p\%$, 则 12 月份产值为 $a(1 + p\%)^{11}$

全年的产值 A 为 12 个月产值的求和: $A = a + a(1 + p\%) + a(1 + p\%)^2 + \dots + a(1 + p\%)^{11}$

例题精练

1. 某商品的成本为 240 元. 若按该商品标价的八折出售, 利润率是 15%, 则该商品的标价为 ()

A. 276 元 B. 331 元 C. 345 元 D. 360 元 E. 400 元

【答案】C.

解析:

设标价为 x 元则可列方程为:

$$0.8x - 240 = 240 \times 15\%$$

$$\text{解得: } x = 345$$

则该商品的标价为 345 元;

故选 C。

2. 售出一件甲商品比售出一件乙商品利润要高.

(1) 售出 5 件甲商品, 4 件乙商品共获利 50 元;

(2) 售出 4 件甲商品, 5 件乙商品共获利 47 元.

【答案】C.

解析:

显然条件 (1)、(2) 单独都不充分;

条件 (1)(2) 联合, 设售出一件甲商品获利 x 元, 售出一件乙商品获利 y 元;

则 $\begin{cases} 5x+4y=50, \\ 4x+5y=47 \end{cases}$, 两方程相减得 $x-y=3>0$,

所以售出一件甲商品比售出一件乙商品利润要高。

故联合充分;

故选 C.

3. A 企业的职工人数今年比前年增加了 30%.

(1) A 企业的职工人数去年比前年减少了 20%;

(2) A 企业的职工人数今年比去年增加了 50%.

【答案】E.

解析:

显然条件(1)条件(2)单独不充分;

两条件联合: 设前年人数为 x , 则去年为 $x(1-20\%)=0.8x$,

今年为 $x(1-20\%)(1+50\%)=1.2x$,

所以今年比前年增加了 $\frac{1.2x-x}{x} \times 100\% = 20\%$

则联合也不充分, 不能得到 A 企业的职工人数今年比前年增加了 30%. 故选 E.

4. 企业今年人均成本是去年的 60%.

(1) 甲企业今年总成本比去年减少 25%, 员工人数增加 25%;

(2) 甲企业今年总成本比去年减少 28%, 员工人数增加 20%.

【答案】D.

解析:

设去年成本为 a ，员工人数为 b ，则人均成本为 $\frac{a}{b}$ ；

条件（1）， $\frac{a(1-25\%)}{b(1+25\%)} = \frac{a}{b} \times 60\%$ ，

所以该企业今年人均成本是去年的 60%. 充分；

条件（2）， $\frac{a(1-28\%)}{b(1+20\%)} = \frac{a}{b} \times 60\%$ ，

所以该企业今年人均成本是去年的 60%. 充分，

条件（1），条件（2）均充分；

故选 D.

5. 某产品去年涨价 10%，今年涨价 20%，则该产品这两年涨价（ ）

A: 15% B: 16% C: 30% D: 32% E: 33%

【答案】D.

解析：

设产品原价 100 元，现价 $100 \times (1+10\%) \times (1+20\%) = 132$ ；

$$(132 - 100) \div 100 = 32\%$$

6. 如果甲公司的年终奖总额增加 25%，乙公司的年终奖总额减少 10%，两者相等。则能确定

两公司的员工人数之比。

(1) 甲公司的人均年终奖与乙公司的相同

(2) 两公司的员工人数之比与两公司的年终奖总额之比相等

【答案】D

解析：

设甲公司员工为 x 人, 年终奖总额为 m , 乙公司员工为 y 人, 年终奖总额为 n .

可得 $(1+25\%)m = (1-10\%)n$ 即 $1.25m = 0.9n$, $\frac{m}{n} = \frac{18}{25}$

条件 (1) $\frac{m}{x} = \frac{n}{y}$, 可得 $\frac{x}{y} = \frac{m}{n} = \frac{18}{25}$, (1) 充分.

条件 (2) $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$, 直接可得 $\frac{x}{y} = \frac{18}{25}$, (2) 也充分.

题型二 比例问题

【方法与技巧】

(1) 见比设 k 法

利用比例条件, 将实数的比设为 k , 进而引出其他参数.

(2) 见比设数法

利用比例条件, 已知比例设为符合条件的特殊数字.

例题精练

1. 电影开演时观众中女士与男士人数之比为 5:4, 开演后无观众入场, 放映一个小时后, 女士的 20%, 男士的 15% 离场, 则此时在场的女士与男士人数之比为 ().

A. 4:5 B. 1:1 C. 5:4 D. 20:17 E. 85:64

【答案】D.

解析:

方法一,

设开演时女观众 50 人, 男观众 40 人;

一个小时候，女观众剩 80%，男观众剩 85%；

则此时在场的女观众与男观众人数之比为 $50 \times 80\% : 40 \times 85\% = 20:17$

故选 D.

方法二，

设开演时女观众 $5k$ 人，男观众 $4k$ 人；

一个小时候，女观众剩 80%，男观众剩 85%；

则此时在场的女观众与男观众人数之比为 $(5k \times 80\%) : (4k \times 85\%) = 20:17$

故选 D.

2. 某厂生产的一批产品经产品检验，优等品与二等品的比是 5:2，二等品与次品的比是 5:1，

则该批产品的合格率（合格品包括优等品与二等品）为（ ）

A. 92% B. 92.3% C. 94.6% D. 96% E. 96.3%

【答案】C

解析：

优等：二等=5:2=25:10；二等：次等=5:1=10:2；

则优等：二等：次等 = 25:10: 2；

合格率= $(25+10) \div (25+10+2) = 94.6\%$.

3. 某家庭在一年总支出中，子女教育支出与生活资料支出的比为 3:8，文化娱乐支出与子女

教育支出的比为 1:2. 已知文化娱乐支出占家庭总支出的 10.5%，则生活资料支出占家庭总

支出的（ ）

A. 40% B. 42% C. 48% D. 56% E. 64%

【答案】D

解析:

由已知得, 子女教育支出: 生活资料支出: 文化娱乐支出 = 6:16:3, 则生活资料支出占家庭总支出的 $10.5\% \div 3 \times 16 = 56\%$

4. 学科竞赛一等奖、二等奖和三等奖, 比例为 1:3:8, 获奖率为 30%, 已知 10 人获得一等奖, 则参加竞赛的人数为 ()

A. 300 B. 400 C. 500 D. 550 E. 600

【答案】B

解析: 一等奖、二等奖和三等奖, 比例为 1:3:8, 已知 10 人获得一等奖, 则 30 人获得二等奖, 80 人获得三等奖. 获奖人数一共 $10+30+80=120$ 人. 获奖率为 30%, 总人数 $= 120 \div 30\% = 400$ 人.

题型三 平均值问题 (十字交叉法)

【方法与技巧】

原理: 设一个整体可分成 A、B 两部分, A 部分的数值有 x 个 a , B 部分的数值有 y 个 b , A+B 的平均值为 c , 则我们可用十字交叉法来求 A、B 数量之比:

$$\begin{array}{ccc} \text{A. } a & \diagdown & c-b \\ & C & \\ \text{B. } b & \diagup & a-c \end{array}$$

则根据 $ax + by = c(x + y)$, 得 $\frac{x}{y} = \frac{c-b}{a-c}$.

举例:

$$\frac{A}{B} = \frac{200-180}{180-100}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{A. } 100 & \diagdown & 200-180=20 \\ & 180 & \\ \text{B. } 200 & \diagup & 180-100=80 \end{array}$$

例题精练

1. 某部门在一次联欢活动中共设了 26 个奖，奖品均价为 280 元，其中一等奖单价为 400 元，其他奖品均价为 270 元，一等奖的个数为（ ）。

A. 6 B. 5 C. 4 D. 3 E. 2

【答案】E.

解析：

用十字交叉法求解：

$$\begin{array}{ccc} 400 & & 10 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 280 & \\ & \nearrow & \searrow \\ 270 & & 120 \end{array} \Rightarrow x = \frac{1}{13} \times 26 = 2$$

2. 车间共有 40 人，某次技术操作考核的平均成绩为 80 分，其中男工平均成绩为 83 分，女工平均成绩为 78 分，该车间有女工（ ）人

A. 16 (B) 18 (C) 20 (D) 24 (E) 28

【答案】D.

解析：

$$\begin{array}{ccc} \text{男工: } x \text{ 人} & 83 & 2 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 80 & \\ & \nearrow & \searrow \\ \text{女工: } y \text{ 人} & 78 & 3 \end{array} \quad \text{则 } \frac{x}{y} = \frac{2}{3}; \text{ 而 } x + y = 40, \text{ 得 } x = 16, y = 24;$$

3. 已知某车间的男工人数比女工人数多 80%，若在该车间一次技术考核中全体工人的平均成绩为 75 分，而女工的平均成绩比男工平均成绩高 20%，则女工的平均成绩为（ ）分。

A. 88 B. 86 C. 84 D. 82 E. 80

【答案】C.

解析:

设女工有 x 人, 则男工有 $1.8x$ 人. 设男工平均成绩 m 分, 女工平均成绩 $1.2m$ 分.

$$\begin{array}{ccc} \text{男工: } 1.8x \text{ 人} & m & 1.2m - 75 \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & 75 & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \text{女工: } x \text{ 人} & 1.2m & 75 - m \end{array} \quad \text{则 } \frac{1.8x}{x} = \frac{1.2m - 75}{75 - m}; \text{ 得 } m = 84$$

4. 疫情期间, 路含同学要把浓度为 95% 和 45% 的甲、乙两种酒精配成浓度为 75% 的酒精 500 克, 则甲、乙两种酒精应各取 ()

- A. 320 克和 180 克 B. 315 克和 185 克 C. 310 克和 190 克
D. 300 克和 200 克 E. 以上都不对

【答案】D.

解析:

设甲酒精取 x 克, 乙酒精取 $500 - x$ 克.

$$\begin{array}{ccc} \text{甲: } x & 95\% & 30\% \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & 75\% & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \text{乙: } 500 - x & 45\% & 20\% \end{array} \quad \text{则 } \frac{x}{500 - x} = \frac{30\%}{20\%}; \text{ 得 } x = 300, 500 - x = 200.$$

题型四 溶液问题

【方法与技巧】

1. 解题原理:

$$(1) \text{ 溶液} = \text{溶质} + \text{溶剂} \quad (2) \text{ 浓度} = \frac{\text{溶质}}{\text{溶液}} \times 100\% = \frac{\text{溶质}}{\text{溶质} + \text{溶剂}} \times 100\%$$

2. 解题技巧:

(1) 根据溶质守恒找等量关系 (2) 溶液配比问题优先考虑: 十字交叉法

例题精练

1. 含盐 12.5% 的盐水 40 千克蒸发掉部分水分后变成了含盐 20% 的盐水, 蒸发掉的水分的重量为 () 千克.

A. 19 B. 18 C. 17 D. 16 E. 15

【答案】E.

解析:

设蒸发掉的水分重量为 x 千克

可列方程: $(40 - x) \cdot 20\% = 40 \cdot 12.5\%$

解得: $x = 15$

故选 E。

2. A 试管中有浓度 10% 的盐水 10g, B 试管中有浓度 20% 的盐水 30g, 现在把 A、B 中的盐水混合倒在试管 C 中, 此时盐水的浓度是 ()

A. 15% B. 16% C. 18.5%

D. 18% E. 17.5%

【答案】E

解析:

$$\frac{10 \times 10\% + 30 \times 20\%}{10 + 30} = 17.5\%$$

3. 一杯盐水的浓度是 20%, 用掉了一半之后, 剩余盐水的浓度是 () .

- A. 10% B. 20% C. 40% D. 30% E. 无法确定

【答案】B

解析：

盐水的浓度是 20%，用掉了一半之后，剩余盐水的浓度不变.

4. 有甲、乙两种浓度的酒精，已知用 10 升甲酒精和 12 升乙酒精可以配成浓度为 70% 的酒精，用 20 升甲酒精和 8 升乙酒精可以配成浓度 80% 的酒精，则甲酒精的浓度为 ()

- A. 72% B. 80% C. 84% D. 88% E. 91%

【答案】E

解析：

设甲酒精的浓度 x ，乙酒精的浓度 y . 则可列方程：

$$\begin{cases} 10x + 12y = 22 \times 70\% \\ 20x + 8y = 28 \times 80\% \end{cases}, \text{解方程组得: } \begin{cases} x = 0.91 \\ y = 0.525 \end{cases}.$$

题型五 集合问题

【方法与技巧】

设 $m(A)$ 表示集合 A 所含元素的个数，则 (其他集合元素个数表示法类似)：

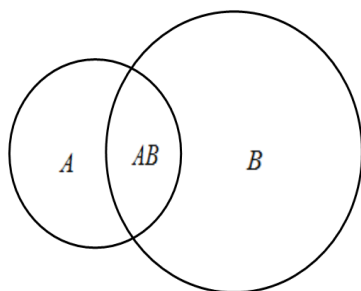


图 1

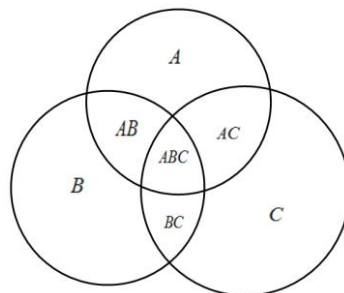


图 2

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(AB) \quad (\text{如图 1}),$$

$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(AB) - m(AC) - m(BC) + m(ABC) \quad (\text{如图 2})$$

举例 (1) 一个班级的同学选兴趣班, 已知每位同学至少选了一个兴趣班, 且 30 人选唱歌, 20 人选跳舞, 其中 10 个人既选择了唱歌又选择了跳舞, 请问班级里一共有多少人?

【解析】对应图 1 中, A 集合是 30 人, B 集合是 20 人, AB 相交的部分是 10 人

所以带入公式 $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(AB) = 30 + 20 - 10 = 40$ 人

(2) 全班一共 100 人, 已知每位同学至少选了一个科目补习班, 且 40 人选语文, 50 人选数学, 35 人选英语, 其中既选语文又选数学的 8 人, 即选数学又选英语的 15 人, 即选语文又选英语的 10 人, 三科全报的有多少人?

【解析】

对应图 2 中, A 集合是 40 人, B 集合是 50 人, C 集合是 35 人, AB 集合是 8 人, BC 集合是 15 人, AC 集合是 10 人, 由公式

$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(AB) - m(AC) - m(BC) + m(ABC)$$

得, $m(ABC) = m(A \cup B \cup C)$

$$-m(A) - m(B) - m(C) + m(AB) + m(BC) + m(AC) = 100 - 40 - 50 - 35 + 8 + 15 + 10 = 8 \quad (\text{人})$$

例题精练

1. 某单位有 90 人, 其中 65 人参加外语培训, 72 人参加计算机培训, 已知参加外语培训而未参加计算机培训的有 8 人, 则参加计算机培训而未参加外语培训的人数是 ().

A. 5 B. 8 C. 10 D. 12 E. 15

【答案】E.

解析：

设参加计算机培训而没有参加外语培训的人数为 x ，两者都参加的人数为 y 。

由题意可得 $x + y = 72$, $y + 8 = 65$,

解得 $x = 15$ ，故选 E。

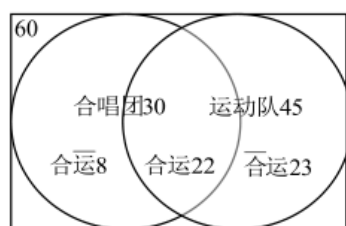
2. 某年级 60 名学生中，有 30 人参加合唱团，45 人参加运动队，其中参加合唱团而未参加运动队的有 8 人，则参加运动队而未参加合唱团的有（ ）人。

A. 15 B. 22 C. 23 D. 30 E. 37

【答案】C.

解析：

如图所示维恩图，故选 C.

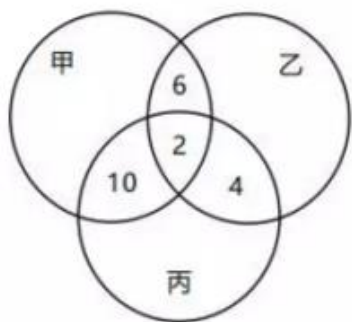


3. 有 96 位顾客至少购买了甲、乙、丙三种商品中的一种，经调查：同时购买了甲、乙两种商品的有 8 位，同时购买了甲、丙两种商品的有 12 位，同时购买了乙、丙两种商品的有 6 位，同时购买了三种商品的有 2 位，则仅购买一种商品的顾客有（ ）

A. 70 位 B. 72 位 C. 74 位 D. 76 位 E. 82 位

【答案】C

解析：



$$96 - 6 - 2 - 10 - 4 = 74.$$

4. 老师问班上 50 名同学周末复习情况, 结果有 20 人复习过数学, 30 人复习过语文, 6 人复习过英语, 且同时复习过数学和语文的有 10 人, 同时复习过语文和英语的有 2 人, 同时复习过英语和数学的有 3 人. 若同时复习过这三门课的人为 0, 则没有复习过这三门课程的学生人数为 ()

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10 E. 11

【答案】C

解析:

复习过数学的看做 A , 复习过语文的看做 B , 复习过英语的看做 C ,

复习数学和语文的看做 AB , 复习数学和英语的看做 AC , 复习语文和英语的看做 BC ,

同时复习过这三门课的看做 ABC , 三科全部都没有复习的看做 D .

因此列式为:

$$50 = (A + B + C - AB - AC - BC + ABC) + D$$

$$50 = (20 + 30 + 6 - 10 - 2 - 3 + 0) + D$$

$$\therefore D = 9$$

题型六 工程问题

【方法与技巧】

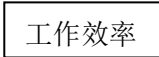
解决这类问题时，通常将整个工程量看成单位 1，然后根据题目条件按比例求解。

计算公式：工作效率 = 完成的工作量 ÷ 工作时间，

总量 = 部分量 ÷ 部分量所占的比例。

（注：如果题目没有给具体的量，将总量看成 1）

例如：

1. 一件工程，甲队单独做 a 天完成，则甲队单独做一天完成工程的 $\frac{1}{a}$ 
2. 一件工程，甲队单独做 a 天完成，乙队单独做 b 天完成，则甲乙两队合作一天完成工程的 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$

例题精练

1. 一项工程要在规定时间内完成，若甲单独做要比规定的时间推迟 4 天，乙单独做要比规定的时间提前 2 天完成，若甲、乙合作了 3 天，剩下的部分由甲单独做，恰好在规定时间内完成，则规定时间为（ ）天。

A. 19 B. 20 C. 21 D. 22 E. 24

【答案】B

解析：

设规定的时间为 x 天，则甲单独做 $x+4$ 天完成，乙单独做 $x-2$ 天完成

甲的工效为 $\frac{1}{x+4}$ ，乙的工效为 $\frac{1}{x-2}$

$$3\left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-2}\right) + \frac{1}{x+4} \cdot (x-3) = 1$$

解得 $x=20$ ，所以选 B

2. 某施工队承担了开凿一条长为 2400 米隧道的工程，在掘进了 400 米后，由于改进了施工工艺，每天比原计划多掘进 2 米，最后提前 50 天完成了施工任务，原计划施工工期是() 天.

A. 200 B. 240 C. 250 D. 300 E. 350

【答案】D

解析：

设原计划每天可掘进 x 米

依题意有： $\frac{400}{x} + \frac{2400-400}{x+2} = \frac{2400}{x} - 50$ ，解得 $x=8$ ，则 $\frac{2400}{8}=300$ (天)。故选 D.

3. 现有一批文字材料需要打印，两台新型打印机单独完成此任务分别需要 4 小时与 5 小时，两台旧型打印机单独完成此任务分别需要 9 小时与 11 小时，则能在 2.5 小时内完成任务.

(1) 安排两台新型打印机同时打印；

(2) 安排一台新型打印机与两台旧型打印机同时打印.

【答案】D

解析：

条件 (1)， $t = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}} = \frac{20}{9} < \frac{5}{2}$ ，充分；

条件 (2)， $t = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}} = \frac{396}{179} < \frac{5}{2}$ ，或 $t = \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}} = \frac{495}{199} < \frac{5}{2}$ ，充分。故选 D.

4. 打印一份资料, 若每分钟打 30 个字, 需要若干小时打完, 当打印完此材料的 $\frac{2}{5}$ 时, 打字效率提高了 40%, 结果提前半小时打完, 这份材料的字数是 () 个.

A. 4650 B. 4800 C. 4950 D. 5100 E. 5250

【答案】E

解析:

设这份资料的字数为 x .

$$\text{可列方程: } \frac{x}{30} - 30 = \frac{\frac{2x}{5}}{30} + \frac{\frac{3x}{5}}{30 \cdot (1 + 40\%)}$$

解得: $x = 5250$, 故选 E.

5. 一项工作, 甲、乙合作需要 2 天, 人工费 2900 元, 乙、丙需 4 天, 人工费 2600 元, 甲、丙合作 2 天完成了 $\frac{5}{6}$, 人工费 2400 元, 甲单独做该工作需要的时间和人工费分别为 ().

A. 3 天, 3000 元 B. 3 天, 2850 元 C. 3 天, 2700 元
D. 4 天, 3000 元 E. 4 天, 2900 元

【答案】A

解析:

设总工作量为单位 1, 甲、乙、丙单独完成这项工作分别需要 x 天、 y 天、 z 天, 甲、乙、丙每天的工资分别为 a, b, c , 则有

$$\begin{cases} (\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \times 2 = 1 \\ (\frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \times 4 = 1 \Rightarrow x = 3, \text{ 即 } x = 3 \\ (\frac{1}{x} + \frac{1}{z}) \times 2 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + 2b = 2900 \\ 4b + 4c = 2600 \Rightarrow a = 1000, \\ 2a + 2c = 2400 \end{cases}$$

即甲三天完成工作，人工费共需 $3a=3000$ 元，故选 A.

题型七 行程问题

【方法与技巧】

(1) 基本公式：路程 = 速度 $\times$ 时间 ($S = vt$).

(2) 直线中的相遇及追击问题

①相遇 (图 1)：两人相向而行 (面对面走)，在中途相遇，设他们的速度分别为 v_1, v_2 ,

相遇时走过的路程分别为 S_1, S_2 ，相遇时所用时间为 t ，则 $t = \frac{S_1}{v_1} = \frac{S_2}{v_2} = \frac{S_1 + S_2}{v_1 + v_2}$.

②追击 (图 2)：甲乙两人从同一起点出发，甲先走了路程 S 后，乙沿同样的路程去追

甲，乙追上甲所用时间为 t ，甲、乙的速度分别为 v_1, v_2 ($v_1 < v_2$)，则 $t = \frac{S}{v_2 - v_1}$.

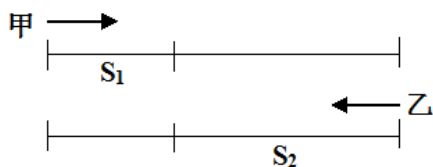


图 1

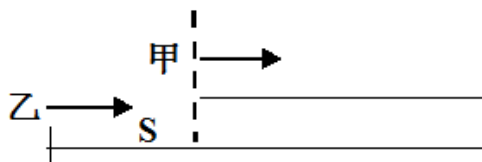


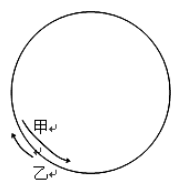
图 2

(2) 圆周运动中的相遇及追击问题: (设圆周长为 S)

①相遇 (图 3)：甲乙从圆周上的同一点开始相背运动，则甲乙每相遇一次，甲与乙

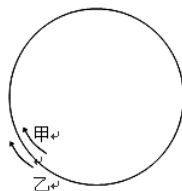
路程之和为一圈，即 $S_{\text{甲}} + S_{\text{乙}} = S$ ，若相遇 n 次有 $S_{\text{甲}} + S_{\text{乙}} = n \cdot S$ 。

②追击（图 4）：甲乙从同一点开始同向运动，设 $v_{\text{甲}} > v_{\text{乙}}$ ，则甲乙每相遇一次，甲比乙多运动一圈，即 $S_{\text{甲}} - S_{\text{乙}} = S$ ，若相遇 n 次，则有 $S_{\text{甲}} - S_{\text{乙}} = n \cdot S$ 。



（圆圈型）每相遇一次，甲乙路程之和为一圈。

图 3



（圆圈型）每相遇一次，甲比乙多跑一圈。

图 4

例题精练

1. A、B 两地相距 15 公里，甲中午 12 时从 A 地出发，步行前往 B 地，20 分钟后乙从 B 地出发骑车前往 A 地，到达 A 地后乙停留 40 分钟后骑车从原路返回，结果甲、乙同时到达 B 地，若乙骑车比甲每小时快 10 公里，则两人同时到达 B 地的时间是（ ）。

- A. 下午 2 时 B. 下午 2 时半 C. 下午 3 时
D. 下午 3 时半 E. 以上选项均不正确

【答案】C

解析：设甲的速度为 x ，则乙的速度为 $x+10$

由题意已知甲只跑了单程，也就是 15 公里，乙跑了来回，还等了 20 分钟+40 分钟就是一个小时

但是两者同时到达，设甲用时为 t ，则

$$t = \frac{15}{x} = \frac{30}{x+10} + 1 \text{（以小时为单位）}$$

解得 $x = -30$ （舍）或 $x = 5$ 则 $t = 3$ （小时）

12 点出发，3 小时后到达，所以选 C 选项

2. 甲、乙两人在环形跑道上跑步，他们同时从起点出发，当方向相反时每隔 48 秒相遇一次，当方向相同时每隔 10 分钟相遇一次，若甲每分钟比乙快 40 米，则甲、乙两人的跑步速度分别是（ ）米/分.

- A. 470, 430 B. 380, 340 C. 370, 330 D. 280, 249
E. 270, 230

【答案】E

解析：

当方向相反时每隔 48 秒相遇一次，为相遇问题，则 $\frac{S}{V_{甲}+V_{乙}}=0.8$ （由题意单位取分钟 $48 \div 60=0.8$ 分钟）

当方向相同时每隔 10 分钟相遇一次，为追击问题，则 $\frac{S}{V_{甲}-V_{乙}}=10$

因为甲每分钟比乙快 40 米，所以 $V_{甲}-V_{乙}=40$ 解得 $S=400$ ， $V_{甲}+V_{乙}=500$.

联立方程组：

$$\begin{cases} V_{甲}-V_{乙}=40 \\ V_{甲}+V_{乙}=500 \end{cases}$$

$$V_{甲}+V_{乙}=500$$

解得： $V_{甲}=270$ ； $V_{乙}=230$ ，所以选 E

3. 甲乙两人相距 330 千米，他们驾车同时出发，经过 2 小时相遇，甲继续行驶 2 小时 24 分钟后到达乙的出发地，则乙的车速为（ ）

- A. 70 km/h B. 75km/h C. 80km/h D. 90km/h E. 96km/h

答案：D

解析：2 小时 24 分 $=1+\frac{24}{60}=2.4$ 小时.

方法一：甲继续行驶 2 小时 24 分钟到达乙地，而这段路是乙来时的路，乙用了 2 小时，所

以

$$\frac{v_{\text{甲}}}{v_{\text{乙}}} = \frac{2}{2.4} = \frac{5}{6}, \text{ 而 } 330 = (v_{\text{甲}} + v_{\text{乙}}) \times 2, \text{ 可得 } v_{\text{甲}} + v_{\text{乙}} = 165 = 15 \times 11, \text{ 所以 } v_{\text{乙}} = 15 \times 6 = 90.$$

方法二:

$$2 \text{ 小时 } 24 \text{ 分} = 1 + \frac{24}{60} = 2.4 \text{ 小时}, \text{ 则可知甲走完全程用了 } 4.4 \text{ 小时},$$

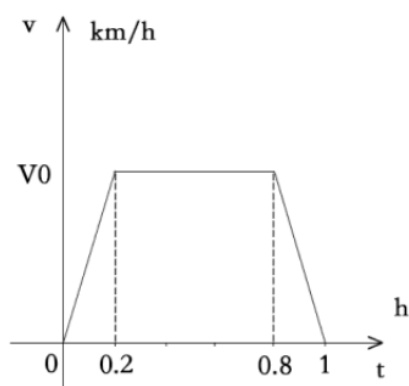
那么甲的速度是 $330 \div 4.4 = 75$ 千米/小时.

则可求相遇时甲走: $75 \times 2 = 150$, 乙走 $330 - 150 = 180$.

则乙的速度: $180 \div 2 = 90 \text{ km/h}$.

4. 货车行驶 72 km 用时 1 小时, 速度 V 与行驶时间 T 的关系如图所示, 则 $V_0 = (\quad)$

A. 72 B. 80 C. 90 D. 85 E. 100



【答案】C

解析:

$$S = vt, \text{ 火车一小时行驶的距离就是梯形的面积, 即: } \frac{0.6+1}{2} \cdot h = 72, \quad h = 90.$$

5. 某人从 A 地出发, 先乘时速为 220 km 的动车, 后转乘时速为 100 km 的汽车到达 B 地,

则 A, B 两地的距离为 960 km .

(1) 乘动车的时间与乘汽车的时间相等;

(2) 乘动车的时间与乘汽车的时间之和为 6 小时.

【答案】C.

解析:

条件(1)、(2)单独都无法确定乘动车的时间与乘汽车的时间,所以都不充分.联立,可知乘动车和汽车的时间均为 3 小时,则可知两地距离为 $(220+100) \times 3 = 960$, 充分.

6. 上午 9 时一辆货车从甲地出发前往乙地,同时一辆客车从乙地出发前往甲地,中午 12 时两车相遇,已知货车和客车的时速分别是每小时 90 千米和 100 千米,则当客车到达甲地时,货车距乙地的距离是()

A. 30 千米 B. 43 千米 C. 45 千米 D. 50 千米 E. 57 千米

【答案】E.

解析:

甲乙两地之间的距离为 $(90+100) \times 3 = 570$, 客车从乙地到甲地所需的时间为 $\frac{570}{100} = 5.7$ 小时, 因此当客车到达甲地时货车距乙地的距离是 $570 - 90 \times 5.7 = 57$ 千米.

题型八 相对速度问题

【方法与技巧】

相对速度问题主要考察两类: 一是顺水逆水问题, 二是火车问题

我们以顺水逆水举例说明原理, 该原理可以推导, 不用记忆:

$$\begin{cases} V_{\text{顺}} = v_{\text{船}} + v_{\text{水}} \\ V_{\text{逆}} = v_{\text{船}} - v_{\text{水}} \end{cases} \Rightarrow V_{\text{顺}} - V_{\text{逆}} = 2 v_{\text{水}}$$

例题精练

1. 已知船在静水中的速度为 28 千米/小时，河水的流速为 2 千米/小时，则此船在相距 78 千米的两地间往返一次所需时间是（ ）。

- A. 5.9 小时 B. 5.6 小时 C. 5.4 小时
D. 4.4 小时 E. 4 小时

【答案】B

解析：

$$\text{顺水: } t_1 = \left| \frac{78}{28+2} \right| = 2.6h$$

$$\text{逆水: } t_2 = \left| \frac{78}{28-2} \right| = 3h$$

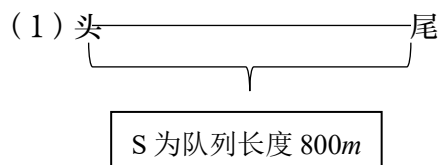
$$\text{总时间} = t_1 + t_2 = 2.6 + 3 = 5.6h$$

2. 一支队伍排成长度为 800 米的队列行军，速度为 80 米/分，队首的通讯员以 3 倍于行军的速度从队首跑步到队尾，在队尾花 1 分钟传达命令后，立即以同样的速度从队尾跑回到队首，在这往返全过程中通讯员所花费的时间为（ ）。

- A. 6.5 分 B. 7.5 分 C. 8 分 D. 8.5 分 E. 10 分

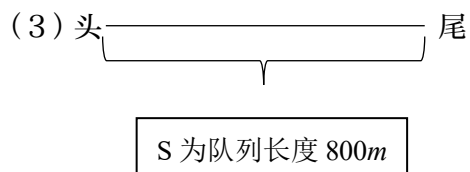
【答案】D

解析：



第一阶段可变成通讯员在队头 240 的速度往尾走，尾部有一小兵 80 的速度往前走，两人相遇问题
 $t_1 = 800 / (240 + 80) = 2.5$

(2) 240 降到 80 的速度, 走 1 分钟, 所以 $t_2=1$



第三阶段可变成通讯员在队尾 240 的速度往头走, 头部有一小兵 80 的速度往前走, 两人追击问题

最后 $t=t_1+t_2+t_3=2.5+1+5=8.5$, 故选 D

3. 一列火车完全通过一个长为 1600 米的隧道用了 25 秒, 通过一根电线杆用了 5 秒, 则该火车的长度为 ().

A. 200 米 B. 300 米 C. 400 米 D. 450 米 E. 500

米

【答案】C

解析:

设火车长度 x , 速度恒定 v , 火车通过长为 1600 米的隧道所走路程为 $1600+x$ 米, 通过一根

电线杆所走路程为 x 米, 则 $v = \frac{1600+x}{25} = \frac{x}{5}$, 解得, $x=400$, 故选 C

4. 一列火车匀速行驶时, 通过一座长为 250 米的桥梁需要 10 秒钟, 通过一座长为 450 米的桥梁需要 15 秒钟, 该火车通过长为 1050 米的桥梁需要 () 秒.

A. 22 B. 25 C. 28 D. 30 E. 35

【答案】D

解析:

设火车长度 x , 速度恒定 v

$$v = \frac{250+x}{10} = \frac{450+x}{15} \quad \text{解得, } x=150 \text{ 代入式子, 得 } v=40m/s$$

$$T = \frac{1050+150}{40} = 30s, \text{ 故选 D}$$

题型九 算术类问题及综合

【方法与技巧】

应用题考察题型广泛, 除了以上典型题型, 还有部分类型我们不再分类讨论. 本部分主要包含:

(1) 直接列式求解; (2) 根据题意列方程或者不定方程求解, 不定方程往往需要我们试数求解.

例题精练

1. 果园里有苹果树 100 棵, 占全部果树的 $\frac{1}{4}$, 其他种类果树共有 () 棵.

A. 100 B. 200 C. 300 D. 400 E. 500

【答案】C.

解析:

$$100 \div \frac{1}{4} = 400, 400 - 100 = 300, \text{ 故选 C.}$$

2. 一满杯酒的容积为 $\frac{1}{8}$ 升.

(1) 瓶中有 $\frac{3}{4}$ 升酒, 再倒入 1 满杯酒可使瓶中的酒增至 $\frac{7}{8}$ 升.

(2) 瓶中有 $\frac{3}{4}$ 升酒, 再从瓶中倒出 2 满杯酒可使瓶中的酒减至 $\frac{1}{2}$ 升.

【答案】D.

解析:

$$(1) \quad \frac{3}{4} + x = \frac{7}{8} \quad x = \frac{1}{8} \quad (\text{能推出题干, } \checkmark)$$

$$(2) \quad \frac{3}{4} - 2x = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{8} \quad (\text{能推出题干, } \checkmark)$$

所以, 正确答案为 D.

3. 某公司投资一个项目, 已知上半年完成了预算的 $\frac{1}{3}$, 下半年完成了剩余部分的 $\frac{2}{3}$, 此时

还有 8 千万元投资未完成, 则该项目的预算为 ().

A. 3 亿 B. 3.6 亿 C. 3.9 亿 D. 4.5 亿 E. 5.1 亿

【答案】B.

解析:

设该项目的预算为 x , 由已知得 $\frac{1}{3}x + (x - \frac{1}{3}x) \times \frac{2}{3} + 0.8 = x, x = 3.6$.

4. 在一次捐赠活动中, 某市将捐赠的物品打包成件, 其中帐篷和食品共 320 件, 帐篷比食品多 80 件, 则帐篷的件数是 ().

A. 180 B. 200 C. 220 D. 240 E. 260

【答案】B.

解析:

设帐篷 x 件，食品 y 件，则 $\begin{cases} x+y=320 \\ x=y+80 \end{cases}$ 解得 $x=200, y=120$.

5. 有一批同规格的正方形瓷砖，用它们铺满某个正方形区域时剩余 180 块，将此正方形区域的边长增加一块瓷砖的长度时，还需要增加 21 块瓷砖才能铺满，该批瓷砖共有（ ）

A. 9981 块 B. 10000 块 C. 10180 块 D. 10201 块 E. 10222 块

【答案】C.

解析:

设正方形瓷砖为 1×1 的，假设共有 N 块瓷砖，正方形区域的长度为 a ，则有

$$\begin{cases} 1^2 \times (N - 180) = a^2 \\ 1^2 \times (N + 21) = (a + 1)^2 \end{cases} \Rightarrow N = 10180$$

6. 一次考试有 20 道题，做对一题得 8 分，做错一题扣 5 分，不做不计分，某同学共得 13 分，则该同学没做的题数是（ ）.

A. 4 B. 6 C. 7 D. 8 E. 9

【答案】C.

解析:

设作对 X 题，做错 Y 题，则不做的题为 $20 - X - Y$ 题

根据题意可列方程： $8X - 5Y = 13$ ，同时 $X, Y < 20$

试数思路： $8X$ 为偶数，13 是奇数，则 $5Y$ 一定为奇数，因此 Y 也为奇数， Y 可能的取值为 1, 3, 5, 7, ……

试数之后得 $X=6, Y=7$ 则没做的题数是 $20 - 6 - 7 = 7$ ，选择 C 选项

7. 在年底的献爱心活动中, 某单位共有 100 人参加捐款, 经统计, 捐款总额是 19000 元, 个人捐款数额有 100 元、500 元和 2000 元三种, 该单位捐款 500 元的人数为 ().

A. 13 B. 18 C. 25 D. 30 E. 28

【答案】A.

解析: 设捐款数额为 100 元、500 元和 2000 元的人数分别为 x 、 y 、 z .

$$\text{则} \begin{cases} x + y + z = 100 \\ x + 5y + 20z = 190 \end{cases} \Rightarrow 4y + 19z = 90 \Rightarrow y = \frac{90 - 19z}{4}$$

由于 $4y$ 和 90 都是偶数, 偶数-偶数=偶数, 所以 $19z$ 为偶数, 经过试数可得 $z = 2, y = 13$

8. 某机构向 12 位教师征题, 共征集到 5 种题型的试题 52 道, 则能确定供题教师的人数。

(1) 每位供题教师提供的试题数相同。

(2) 每位供题教师提供的题型不超过 2 种。

【答案】C.

解析: $52 = 1 \times 52 = 2 \times 26 = 4 \times 13$

条件 (1) 老师人数可能为 1, 2 或 4。因此, 不充分。

条件 (2) 无法确定每位老师供题数目情况, 不能确定供题教师的人数, 不充分。

联立: 当人数为 1 或 2 时, 由于每位供题教师提供的题型不超过 2 种, 则题型达不到 5 种,

故舍去。可得教师人数只能为 4 人, 充分。

9. 共有若干辆车, 则能确定人数:

(1) 若每辆坐 20 人, 1 车未满

(2) 若每辆坐 12 人, 则少 10 个座

【答案】E.

解析:

设有 n 辆车, 总共有 x 个人。

由条件 (1) 得: $20(n-1) < x < 20n$, 单独不充分, 无法确定 x 。

由条件 (2) 得: $x = 12n + 10$, 单独不充分, 无法确定 x 。

(1)、(2) 联合得: $20(n-1) < 12n + 10 < 20n$, 得 $n = 2$ 或 3 , 则 $x = 34$ 或 46 , 也无法确定最终人数, 则联合也不充分。

10. 已知甲、乙、丙三人共捐款 3500 元, 则能确定每人的捐款金额。

(1) 三人的捐款金额各不相同

(2) 三人捐款金额都是 500 的倍数

【答案】E.

解析:

(1) 和 (2) 单独显然不充分;

联合, 设甲捐款 $500a$, 乙捐款 $500b$, 丙捐款 $500c$, 且 a 、 b 、 c 均为整数。

则有 $500(a+b+c) = 3500$, $a+b+c = 7$, $1+2+4=7$, 但不确定 a 、 b 、 c 孰大孰小, 所

以不确定 a 、 b 、 c 的具体数值, 则不能确定每人的捐款金额。

第五章 数列

第一节 数列的概念

知识精讲

一、数列的概念与通项公式.

数列, 即按顺序排成一列的数. 表示方法: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n \dots$ 或数列 $\{a_n\}$.

例①: 数列 1, 3, 5, 7, 9, 可以表示成: $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, \dots$, 也可以表示成:

$a_n = 2n - 1$ (这个数列属于等差数列, 在第二节我们会进一步学习).

例②: 数列 2, 4, 8, 16, 32, 可以表示成: $a_n = 2^n$ (这个数列属于等比数列, 在第三节我们会进一步学习).

通过以上两个例子, 我们知道数列可以用一个含有 n 的表达式表示出来, 即: $a_n = f(n)$, 这个表达式叫做数列的通项公式.

二、通项公式 a_n 和前 n 项和 S_n 之间的关系

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

上式称为数列的前 n 项和.

例: 数列 $a_n = 2n - 1$, 则 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 3 + 5 = 9$

显然有以下事实:

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_1 = a_1$$

观察可知:

$$S_4 - S_3 = a_4$$

$$S_3 - S_2 = a_3$$

$$S_2 - S_1 = a_2$$

由此可以推测有以下结论: $a_n = S_n - S_{n-1}$, 当 $n \geq 2$

上式是 $n \geq 2$ 时的结论, 无法计算出 a_1 , a_1 需要单独带 $n = 1$ 进行计算. 由此, 我们得到通项

公式 a_n 与前 n 项和 S_n 之间的重要关系:

$$a_n = \begin{cases} S_1, & \text{当 } n=1 \\ S_n - S_{n-1}, & \text{当 } n \geq 2 \end{cases}$$

注意: $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$, 用此公式计算的 a_n 不包含 a_1 , 即: 用完此公式后, 要进行验

证首项是否符合公式, 如果不符合, 应该单列出首项.

例: 已知

$$S_n = n^2 + 1, \text{ 则当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 1) - [(n-1)^2 + 1] = 2n - 1$$

由于当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 2$, 不满足 $a_n = 2n - 1$

$$\text{故通项公式为: } a_n = \begin{cases} 2, & \text{当 } n=1 \\ 2n-1, & \text{当 } n \geq 2 \end{cases}$$

例题精练

1. 数列 1, 3, 7, 15, …… 的通项公式为: ()

A. $a_n = 2n - 1$ B. $a_n = 2n + 1$ C. $a_n = 2^n - 1$ D. $a_n = 2^n + 1$ E. 以上选项

均不正确

【答案】C.

解析:

代入选项:

$$A: a_1 = 2 \times 1 - 1 = 1, a_2 = 2 \times 2 - 1 = 3, a_3 = 2 \times 3 - 1 = 5 \neq 7 \text{ 故不选 } A$$

$$B: a_1 = 2^1 + 1 = 3 \neq 1 \text{ 故不选 } B$$

$$C: a_1 = 2^1 - 1 = 1, a_2 = 2^2 - 1 = 3, a_3 = 2^3 - 1 = 7 \text{ 故选 } C$$

$$D: a_1 = 2^1 + 1 = 3 \neq 1 \text{ 故不选 } D$$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + 2n$, 则 $a_5 = (\quad)$

A. 10 B. 11 C. 12 D. 13 E. 14

【答案】B.

解析:

$$a_5 = S_5 - S_4 = 5^2 + 2 \times 5 - (4^2 + 2 \times 4) = 35 - 24 = 11 \text{ 故选 } B$$

3. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 4n^2 + n - 2$, 则它的通项公式是 $(\quad)$.

A. $a_n = 8n - 3$ B. $a_n = 8n + 5$ C. $a_n = \begin{cases} 3, n=1, \\ 8n-3, n \geq 2 \end{cases}$

D. $a_n = \begin{cases} 3, n=1, \\ 8n+5, n \geq 2 \end{cases}$ E. 以上选项均不正确

【答案】C.

解析:

【方法一】由前 n 项和的性质的 $a_n = S_n - S_{n-1} = 4n^2 + n - 2 - [4(n-1)^2 + (n-1) - 2]$

$$= 4n^2 + n - 2 - [4(n^2 - 2n + 1) + (n-1) - 2] = 8n - 3 \text{ (此时不要着急选 } A \text{)}$$

需要讨论 a_1 是否满足通项公式, 因为 $a_1 = S_1 = 4 + 1 - 2 = 3$

而当 $n=1$ 时 $8n-3=8-3=5 \neq 3$

所以 $a_n = \begin{cases} 3, n=1, \\ 8n-3, n \geq 2 \end{cases}$ 故选 C

【方法二】直接将 $n=1, n=2$ 代入 S_n 求得 $a_1=3, a_2=13$ 代入选项, 验证通项公式是否符合、

4. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + 3n + 2$, 则 $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = (\quad)$.

A. $6n+18$ B. $3n+6$ C. $6n$ D. 18 E. $6n-18$

【答案】A.

解析:

应用特值法, 当 $n=1$ 时, 求 $a_2 + a_3 + a_4$

$$S_1 = 1 + 3 + 2 = 6, S_4 = 4 \times 4 + 3 \times 4 + 2 = 30 \quad a_2 + a_3 + a_4$$

$$a_2 + a_3 + a_4 = S_4 - S_1 = 30 - 6 = 24$$

只有 A: $6n + 18 = 6 \times 1 + 18 = 24$ 故选 A

第二节 等差数列

知识精讲

一、等差数列的定义

如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它前一项的差等于同一个常数, 这个数列就叫做等差数列, 这个常数叫做等差数列的公差, 记做 d . 即: $a_{n+1} - a_n = d$ (d 为常数, $n \in N^*$);

例: 数列 3, 5, 7, 9, 11……, 这个数列每一项与前一项的差都是 2, 即这个数列是公差 $d = 2$ 的等差数列.

二、等差数列的通项公式

在数列 3, 5, 7, 9, 11……中, $a_1 = 3$, $d = 2$, 观察可得:

$$a_1 = a_1 + 0d$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$

显然, 等差数列的通项公式可以用首项 a_1 和公差 d 表示出来:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad (d \text{ 为常数}, n \in N^*);$$

例①: $a_1 = 5$, $d = 2$ 的等差数列, 通项公式为: $a_n = 5 + 2(n-1) = 2n + 3$

例②: $a_1 = -3$, $d = -2$ 的等差数列, 通项公式为: $a_n = -3 - 2(n-1) = -2n - 1$

由此可见, 若等差数列的公差为 d , 则通项公式为: $a_n = dn + C$, 其中 C 为待定常数.

例: $a_1 = 2$, $d = 5$, 则通项公式为 $a_n = 5n + C$, 将 $a_1 = 2$ 代入可得 $C = -3$, 即通项公式为 $a_n = 5n - 3$

已知等差数列的首项与公差时, 使用以上方法可以快速得出通项公式.

观察以下式子:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= d \\ a_5 - a_2 &= 3d \\ a_9 - a_7 &= 2d \\ a_2 - a_6 &= -4d \end{aligned}$$

由此可得等差数列的一项重要结论:

$$a_n - a_m = (n-m)d, \text{ 其中 } m, n \text{ 是正整数}$$

三、下标和定理

观察以下式子:

$$\begin{aligned} a_1 + a_6 &= 2a_1 + 5d \\ a_2 + a_5 &= 2a_1 + 5d \\ a_3 + a_4 &= 2a_1 + 5d \end{aligned}$$

由此可得等差数列最重要的结论——下标和定理:

$$m + n = p + q, \text{ 则 } a_m + a_n = a_p + a_q \quad (m, n, p, q \in N^*).$$

特殊地, 当 $p = q$ 时, $a_m + a_n = 2a_p$.

即: 当等差数列的两项下标之和相等时, 这两项之和也相等.

$$\text{例: } a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = a_3 + a_3 = 2a_3$$

思考以下式子是否恒成立？

$$a_1 + a_5 = a_6$$

【注意】上式是同学们做题时容易出现的错误，下标和定理必须是两项之和等于两项之和。

等差中项：若 a 、 b 、 c 是等差数列，则由下标和定理可得： $a + c = 2b$ ，其中称 b 为 a 、 c 的等差中项。

四、等差数列前 n 项和公式

1. 根据下标和定理可以推导出以下式子：

$$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = (a_1 + a_6) + (a_2 + a_5) + (a_3 + a_4) = 3(a_1 + a_6) = \frac{6}{2}(a_1 + a_6)$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = (a_1 + a_5) + (a_2 + a_4) + a_3 = \frac{5}{2}(a_1 + a_5)$$

观察可得，等差数列的前 n 项和公式：

$$\text{写法一： } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

这个公式的简单记忆方法：二分之 n 乘首项加尾项，所以计算 S_n 时，只需要知道 a_1 和 a_n 即可。

例：已知 $a_n = 2n - 3$ ，则 $a_1 = -1, a_5 = 7$ ，所以 $S_5 = \frac{(-1+7) \cdot 5}{2} = 15$

2. 在上例中，我们发现 $S_5 = 5a_3$ ，这看上去是一个很有用的性质，观察以下式子：

$$S_7 = \frac{7}{2}(a_1 + a_7) = \frac{7}{2} \times 2a_4 = 7a_4$$

$$S_9 = \frac{9}{2}(a_1 + a_9) = \frac{9}{2} \times 2a_5 = 9a_5$$

由此可得计算等差数列前 n 项和 S_n 时，非常实用的一个技巧：

若 a_n 为等差数列，当 n 为奇数时， $S_n = na_k$ ，其中 k 为 $1 \sim n$ 的中位数，即 $k = \frac{n+1}{2}$

例：考试中常见的有： $S_3=3a_2, S_7=7a_4, S_9=9a_5, S_{11}=11a_6, S_{19}=19a_{10}$

3. 等差数列前 n 项和公式的另外两种写法(了解)：

把 a_n 的通项公式代入写法一, 得写法二： $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

将写法二整理成关于 n 的二次式, 得写法三： $S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$

写法三即为写法二的展开形式, 考试中个别题目使用这个形式更方便, 通过这个形式我们

知道：等差

数列前 n 项和 S_n 是关于 n 的二次函数.

五、两个等差数列 S_n 之比问题

我们已经知道以下结论：

若 a_n 为等差数列, 当 n 为奇数时, $S_n=na_k$, 其中 k 为 $1 \sim n$ 的中位数, 即 $k=\frac{n+1}{2}$

这个结论也可写成：若 a_n 为等差数列, 则 $S_{2k-1}=(2k-1)a_k$

则显然也有以下结论：

若两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 $2k-1$ 项和分别用 S_{2k-1} 和 T_{2k-1} 表示, 则 $\frac{S_{2k-1}}{T_{2k-1}}=\frac{a_k}{b_k}$.

例： $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是等差数列, S_n 、 T_n 分别是他们的前 n 项和, 则 $\frac{S_9}{T_9}=\frac{9a_5}{9b_5}=\frac{a_5}{b_5}$.

六、等差数列前 n 项和 S_n 的最值

思考：数列 $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots$ 前 n 项和有无最值？

数列 $3, 5, 2.5, 1.5, 0.5, -0.5, -1.5, \dots$ 前 n 项和有无最值？

总结：（一）当 $a_1 < 0, d > 0$ 时, S_n 有最小值.

(二) 当 $a_1 > 0, d < 0$ 时, S_n 有最大值.

(三) 当 a_n 为 0 或者 a_n 变号 (由负变正或者由正变负) 时, S_n 会出现最值.

【注】在往年的考试中从未出现过要求我们判断是最大值、或是最小值的情况, 都是直接要求我们求出最大值或最小值, 所以在应对前 n 项和最值问题时, 只需要以下两个步骤——求 S_n 最值的思路:

①求 $a_n = 0$ 时 n 的值, 此时 S_n 是最值.

②看 a_n 什么时候改变符号, 若 a_n 和 a_{n+1} 符号相反 (即 $a_n a_{n+1} < 0$), 则 S_n 是最值.

例①: 求数列 $a_n = 2n - 6$ 的最值: 观察可知 $a_3 = 0$, 所以最值为 $S_3 = \frac{3}{2}(a_1 + a_3) = -6$

例②: 求数列 $a_n = 2n - 5$ 的最值: 观察可知 $a_2 < 0$, $a_3 > 0$, 所以最值为

$$S_2 = a_1 + a_2 = -4$$

七、等差数列的判定问题

(1) 定义法: $a_{n+1} - a_n = d$ (d 为常数, $n \in \mathbb{N}^*$); (特值法验证前三项 a_1 、 a_2 、 a_3 即可)

(2) 通项公式法: $a_n = kn + b$, (k, b 为常数, $n \in \mathbb{N}^*$);

因为 $a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d)$ (d 为常数, $n \in \mathbb{N}^*$); 则 a_n 可表示为 $a_n = kn + b$, 其中

k 为等差数列的公差, 它可取任意实数.

(3) 前 n 项和公式法: $S_n = an^2 + bn$ (a, b 为常数). 其中 a, b 可以为任意实数, 常数项为 0 是一大特点

例: ①数列 $a_n = 3n$; ②数列 b_n 的前 n 项和 $S_n = 2n^2 + 3n + 1$, 这两个数列是不是等差数列?

容易验证 a_n 是等差数列, 而 b_n 不是等差数列 (主要是因为 b_1 不符合通项公式).

八、解决等差数列基本问题的思路：

(1) 首选特殊值法.

(2) 有两项相加，就用下标和定理.

(3) 没有两项相加就用万能方法——即每一项全都用 a_1 和 d 表示.

例题精练

1. 下列通项公式表示的数列为等差数列的是 ().

A. $a_n = \frac{n}{n-1}$

B. $a_n = n^2 - 1$

C. $a_n = 5n + (-1)^n$

D. $a_n = 3n - 1$

E. $a_n = \sqrt{n} - \sqrt[3]{n}$

【答案】D.

解析：

根据等差数列的性质，等差数列的通项公式为关于 n 的一次函数，所以选 D.

2. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_2 - a_5 + a_8 = 9$ ，则 $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = ()$.

A. 27

B. 45

C. 54

D. 81

E. 162

【答案】D.

解析：

根据等差数列下标和定理：

$$a_2 + a_8 = 2a_5, \text{ 所以 } a_2 - a_5 + a_8 = 2a_5 - a_5 = a_5 = 9$$

$$S_9 = \frac{9}{2}(a_1 + a_9) = \frac{9}{2} \times 2a_5 = 9 \times 9 = 81$$

【方法二】由于条件中只有一个式子，不妨设 a_n 为 $d = 0$ 数列，即： $k, k, k, \dots, k$

即: $k - k + k = 9$, 所以 $k = 9$, $S_9 = 9k = 81$

选 D

3. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $5a_7 - a_3 - 12 = 0$, $S_{15} = (\quad)$.

A. 15 B. 24 C. 30 D. 45 E. 60

【答案】D.

解析:

$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = 15a_8$$

$$a_7 = a_1 + 6d, a_3 = a_1 + 2d$$

$$5a_7 - a_3 - 12 = 0 \Rightarrow 5(a_1 + 6d) - (a_1 + 2d) - 12 = 0$$

$$\text{所以 } 4a_1 + 28d - 12 = 0 \Rightarrow a_1 + 7d = 3 = a_8$$

可得 $S_{15} = 15a_8 = 15 \times 3 = 45$, 故选 D

方法二:

设 $\{a_n\}$ 是 $d = 0$ 的等差数列 $k, k, k, \dots, k$

所以有 $5k - k - 12 = 0$, 解得 $k = 3$

$$S_{15} = 15k = 15 \times 3 = 45, \text{ 故选 } D$$

4. 一个等差数列的首项为 21, 公差为 -3, 则 n 项和 S_n 的最大值为 $(\quad)$.

A. 70 B. 75 C. 80 D. 84 E. 90

【答案】D.]

解析:

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 21 - 3(n-1) = 24 - 3n$$

令 $a_n = 0$, 即 $24 - 3n = 0$, 即 $n = 8$, $a_8 = 0$

因为 d 为负数, 所以当 $a_n = 0$ 时, S_n 最大, 即 $S_{\max} = S_7 = S_8 = \frac{(a_1 + a_8) \times 8}{2} = 84$

故选 D

5. $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 满足 $S_{19}:T_{19} = 3:2$.

(1) $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) $a_{10}:b_{10} = 3:2$.

【答案】C.

解析:

根据等差数列的性质 $\frac{S_{19}}{T_{19}} = \frac{a_{10}}{b_{10}}$

很显然条件 (1) 和 (2) 单独不充分

所以联立 (1) 和 (2) 得 $\frac{S_{19}}{T_{19}} = \frac{a_{10}}{b_{10}} = \frac{3}{2}$, 故选 C

6. 若 6 、 a 、 c 成等差数列, 且 36 、 a^2 、 $-c^2$ 也成等差数列. 则 $c = (\quad)$

A、-6 B、2 C、3 或 -2 D、-6 或 2 E、以上均不正确

【答案】D.

解析:

由 6 、 a 、 c 成等差数列得: $2a = 6 + c$ ①

由 36 、 a^2 、 $-c^2$ 成等差数列得: $2a^2 = 36 - c^2$ ②

联立①和②得 $(6+c)^2 = 72 - 2c^2$ 化简得 $c^2 + 4c - 12 = 0$ 解得 $c_1 = -6, c_2 = 2$, 故选 D

7. 设 a_n 是等差数列, 则能确定 $a_1 + a_2 + \dots + a_9$ 的值.

(1) 已知 a_1 的值. (2) 已知 a_5 的值.

【答案】B.

解析:

条件(1) 已知 a_1 的值, 想确定 S_9 , 如果使用公式 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, 还需要知道公差 d ,

如果使用公式 $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, 还需要知道 a_9 , 因此无法确定 S_9 , 不充分

条件(2) 因为 $S_9 = a_5 \times 9$, 所以知道 a_5 的值, 就可以确定 S_9 的值, 充分

第三节 等比数列

知识精讲

一、等比数列的定义

如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它前一项的比等于同一个常数, 这个数列就叫做

等比数列. 这个常数叫做等比数列的公比, 记做 q . 即: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ (q 为非零常数).

例: 数列 2, 4, 8, 16, 32……, 这个数列每一项与前一项的比都是 2, 即这个数列是公比 $q = 2$ 的等比数列.

二、等比数列的通项公式

(1) 通项公式

在数列 2, 4, 8, 16, 32……中, $a_1 = 2$, $q = 2$, 观察可得:

$$a_1 = a_1 q^0$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_1 q^3$$

我们发现，等比数列的每一项都可以用首项 a_1 和公比 q 表示出来。

由此，我们可以得**等比数列的通项公式**： $a_n = a_1 q^{n-1}$ (q 为常数, $n \in N^*$);

(2) 等比数列通项公式的相关结论一.

例 1: $a_1=5$, $q=2$ 的等比数列, 通项公式为: $a_n = 5 \times 2^{n-1}$

例 2: $a_1=-3$, $q=-2$ 的等比数列, 通项公式为: $a_n = -3 \times (-2)^{n-1}$

例 3: $a_1=3$, $q=3$ 的等比数列, 通项公式为: $a_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$

由此可见，**等比数列的通项公式**有两种形式:

① $a \times b^{n-1}$, 此时 a 为首项, b 为公比.

② b^n 此时首项和公比都是 b .

(3) 等比数列通项公式的相关结论二.

观察以下式子:

$$a_5 = a_3 q^2$$

$$a_9 = a_2 q^7$$

由此可得**等比数列的一项重要结论**:

$$a_n = a_m q^{n-m}, \text{ 或者 } \frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}.$$

三、等比数列的下标和定理.

(1) 下标和定理.

若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 观察以下式子:

$$\begin{aligned}a_1 a_6 &= a_1 \cdot a_1 q^5 = a_1^2 q^5 \\a_2 a_5 &= a_1 q \cdot a_1 q^4 = a_1^2 q^5 \\a_3 a_4 &= a_1 q^2 \cdot a_1 q^3 = a_1^2 q^5\end{aligned}$$

由此可得等比数列最重要的结论——下标和定理：

$\{a_n\}$ 为等比数列，若 $m+n=p+q$ ，则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q (m, n, p, q \in N^*)$ 。

特殊地，当 $p=q$ 时， $a_m \cdot a_n = a_p^2$ 。

即：当等比数列的两项下标之和相等时，这两项之积也相等。

例： $a_1 a_5 = a_2 a_4 = a_3 a_3 = a_3^2$

(2) 等比中项. 若 a 、 b 、 c 是等比数列，则由下标和定理可得： $b^2 = ac$ ，其中，称 b 为 a 、 c 的等比中项。

(3) 易错点.

等比数列中各项符号问题: 在等比数列中，所有奇数项都是同号的，所有偶数项也是同号的，但是相邻两项可能同号也可能异号。

例：数列 $a_n = (-2)^n$ ，的前 6 项为：-2, 4, -8, 16, -32, 64

例 1： $a_1=2$ ， $a_5=8$ ，则 a_3 等于几？由下标和定理可知 $a_3=4$ ，注意 a_3 的符号与 a_1 相同。

例 2： $a_1=2$ ， $a_3=8$ ，则 a_2 等于几？由下标和定理可知 $a_2=4$ 或者 -4，注意 a_2 的符号不

—

定与 a_1 相同。

四、等比数列的前 n 项和

当公比 $q=1$ 时，等比数列即为常数列，显然其前 n 项和为： na_1 ，例：等比数列 2, 2, 2, 2, ……

的前 n 项和为 $2n$

当公比 $q \neq 1$ 时, 等比数列的前 n 项和公式证明过程复杂, 这里略去证明, 直接给出公式:

$$S_n = \begin{cases} na_1 & (q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q \neq 1) \end{cases}$$

例: 等比数列 $a_n = 2^n$ 的首项 $a_1 = 2$, 公比 $q = 2$, 所以其前 n 项和为:

$$S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2 \times (2^n - 1) = 2^{n+1} - 2$$

解决等比数列基本问题的思路:

- (1) 首选特殊值法.
- (2) 有两项相乘, 就用下标和定理.
- (3) 没有两项相乘就用万能方法——即每一项全都用 a_1 和 q 表示.

例题精练

1. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2a_4 + 2a_3a_5 + a_2a_8 = 25$, 且 $a_1 > 0$, 则 $a_3 + a_5 = ()$.

A. 8 B. 5 C. 2 D. -2 E. -5

【答案】B.

解析: $a_2a_4 + 2a_3a_5 + a_2a_8 = 25$ 根据等比数列性质可得 $a_2a_4 = a_3^2$, $a_2a_8 = a_5^2$

所以 $a_2a_4 + 2a_3a_5 + a_2a_8 = a_3^2 + 2a_3a_5 + a_5^2 = (a_3 + a_5)^2 = 25$

因为 $a_1 > 0$, 所以 a_1 与 a_3 和 a_5 同号, 即 $a_3 + a_5 = 5$, 故选 B

2. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 + a_1 = 34$, $a_5 - a_1 = 30$, 那么 $a_3 = ()$.

A. ± 8 B. 8 C. ± 5 D. -5 E. 以上结论都不对

【答案】B.

解析:

$$\begin{cases} a_5 + a_1 = 34 \\ a_5 - a_1 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5 = 32 \\ a_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow a_3^2 = a_1 a_5 = 64$$

因为等比数列中, a_1, a_3, a_5 符号相同, 所以 $a_3 = 8$, 故选 B

3. 已知等比数列 a_n 中, $a_1 a_9 = 4$, 则 $a_5 = (\quad)$

A. 1 B. 2 C. -2 D. ± 2 E. 4

【答案】D.

解析:

根据等比数列下标和定理, $a_5^2 = a_1 \cdot a_9 = 4$, 所以 $a_5 = \pm 2$, 选 D

4. 等比数列 a_n 中, $a_1 = 2$, $q = 3$, 则 $S_{10} = (\quad)$

A. $3^9 + 1$ B. $3^9 - 1$ C. 3^{10} D. $3^{10} - 1$ E. $3^{10} + 1$

【答案】D.

解析:

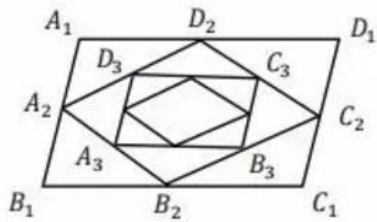
由等比数列前 n 项和公式 $S_{10} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2(1-3^{10})}{1-3} = -(1-3^{10}) = 3^{10} - 1$, 选 D

5. 如图, 四边形 $A_1 B_1 C_1 D_1$ 是平行四边形, $A_2 B_2 C_2 D_2$ 分别是 $A_1 B_1 C_1 D_1$ 四边的中点,

$A_3 B_3 C_3 D_3$ 分别是四边形 $A_2 B_2 C_2 D_2$ 四边的中点, 依次下去, 得到四边形序列 $A_n B_n C_n$

D_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, 设四边形 $A_n B_n C_n D_n$ 的面积为 S_n , 且 $S_1 = 12$, 则 $S_1 + S_2 + S_3 \dots$

$= (\quad)$



A. 16 B. 20 C. 24 D. 28 E. 32

【答案】C.

解析:

$$S_1 = 12, S_2 = 6, S_3 = 3, \dots$$

首项 12, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列. $S = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, $a_1 = 12$, $1-q^n$ 当 n 无限大时, $q^n = 0$

$$S = \frac{12 \times 1}{1 - \frac{1}{2}} = 24$$

$$6. S_2 + S_5 = 2S_8$$

(1) 等比数列前 n 项和为 S_n , 且公比 $q = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

(2) 等比数列前 n 项和为 S_n , 且公比为 $q = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

【答案】A.

解析:

$$\text{由 } S_2 + S_5 = 2S_8 \text{ 可得 } \frac{a_1(1-q^2)}{1-q} + \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = 2 \frac{a_1(1-q^8)}{1-q}$$

$$\text{所以 } 1-q^2 + 1-q^5 = 2-2q^8, \text{ 即 } 2q^8 - q^5 - q^2 = 0 \text{ 化简得 } 2q^6 - q^3 - 1 = 0$$

$$\text{利用十字相乘法分解因式得: } (2q^3+1)(q^3-1)=0, \text{ 解得 } \begin{cases} q_1^3 = -\frac{1}{2} \\ q_2 = 1 \end{cases}$$

其中 $q=1$ 需要舍掉, 因为当公比为 1 是, $S_n = na_1$, 就不会有 $S_2 + S_5 = 2S_8$

当 $q^3 = -\frac{1}{2}$ 时, 解得 $q = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

因此条件 (1) 充分, 条件 (2) 不充分, 选 A

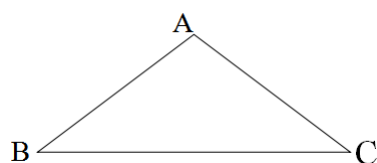
第六章 几何

第一节 三角形

知识精讲

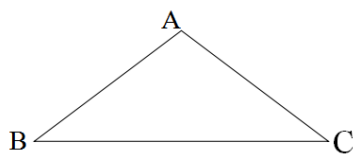
一、三角形的性质

(1) 三角形内角和定理: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

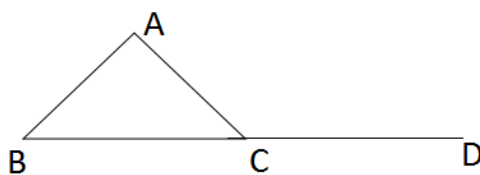


(2) 三角形三边关系结论: 三角形任意两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边.

例: $AB + AC > BC$, $BC - AC < AB$.

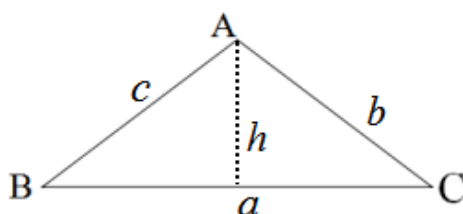


(3) 三角形的任意一个外角等于与它不相邻的两个内角的和: $\angle ACD = \angle A + \angle B$.



(4) 三角形面积公式:

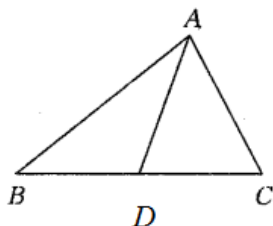
$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin C$, 其中 h 是边 a 上的高, $\angle C$ 是 a, b 边所夹的角.



注:在直角三角形中, $\sin = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}}$

(5) 中线相关结论. 三角形中, 连接一个顶点和它所对边的中点的线段叫做三角形的中线.

$$BD = CD, S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}.$$

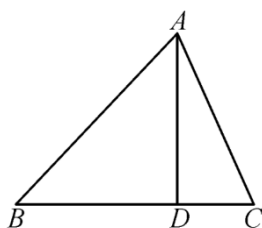


注. 求三角形面积的另外一种方法.

1) D 是 BC 中点, 则 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = 1:1$.

2) D 是 BC 三等分点, 则 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = 1:2$.

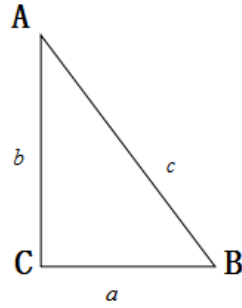
(6) 高线. 从三角形的一个顶点向它的对边所在的直线做垂线, 顶点到垂足之间的线段叫做三角形的高线.



二、特殊三角形

(1) 直角三角形

① 勾股定理.



$c^2 = a^2 + b^2$. $\Leftrightarrow$ 三角形是直角三角形 (其中 $\angle C = 90^\circ$).

重要结论. 直角三角形中, 30° 的角所对的直角边是斜边的一半.

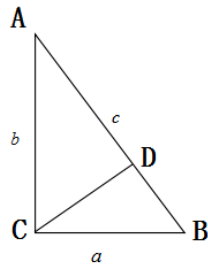
两种特殊的直角三角形三边关系: 一角为 30° 的直角三角形三边比为 $1:\sqrt{3}:2$.

等腰直角三角形三边比为 $1:1:\sqrt{2}$.

常用三角函数值: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

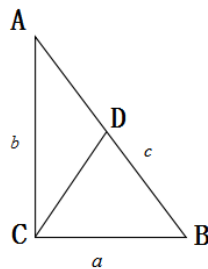
②. 两直角边的乘积等于斜边与其高的乘积:

如图, 在 $RT\triangle ABC$ 中, $CD \perp AB$, 则有 $AC \times BC = AB \times CD$.



③. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

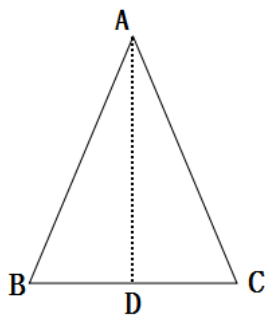
如图, 在 $RT\triangle ABC$ 中, D 是 AB 中点, 则有 $AD = BD = CD$.



(2) 等腰三角形.

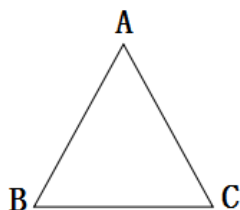
等腰三角形三线合一. 顶角平分线 $\Leftrightarrow$ 底边上的高 $\Leftrightarrow$ 底边上的中线.

AD 平分 $\angle BAC \Leftrightarrow AD \perp BC \Leftrightarrow BD = CD$.



(3) 等边三角形的定义与结论.

①. 三条边都相等, 各角都相等 (60°)



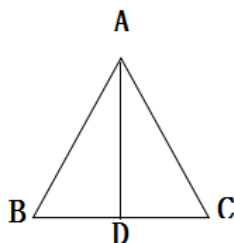
$AB = AC = BC, \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

②. 有一个角等于 60° 的等腰三角形是等边三角形.

③. 面积为 $S_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ (a 为边长).

$AB = AC = BC = a$, 做 $AD \perp BC$ 于 D , 则 $BD = \frac{1}{2}a$. 由勾股定理可得: $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

那么等边三角形的面积 $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$.



三、全等三角形

(1) 判定方法. SSS . SAS . ASA . AAS . HL (5 种)

SSS . 三边对应相等的两个三角形全等, 简称为“边边边”或“ SSS ”;

SAS . 有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等, 简称为“边角边”或“ SAS ”;

ASA . 两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等, 简称为“角边角”或“ ASA ”;

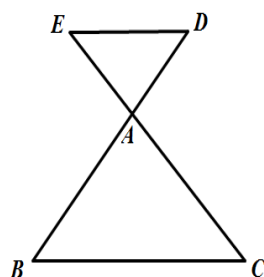
AAS . 两角及其中一角的对边对应相等的两个三角形全等, 简称“角角边”或“ AAS ”;

HL . 如果两个直角三角形的斜边和一条直角边对应相等, 那么这两个直角三角形全等(简记为 HL).

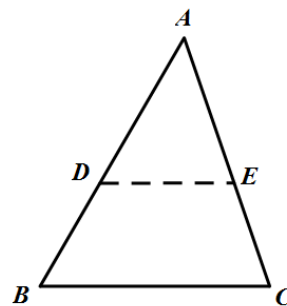
(2) 性质. 对应线段(对应边, 对应边上的高、中线、角平分线)均相等, 且对应角、面积也相等.

四、相似三角形

(1) 三个角对应相等. 三条边对应成比例的两个三角形叫做相似三角形.



$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$$



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

(2) 相似比的定义. 相似三角形对应边的比(k)叫做相似比(或相似系数).

(3) 相似性质.

①相似三角形的对应角相等，对应线段成比例.

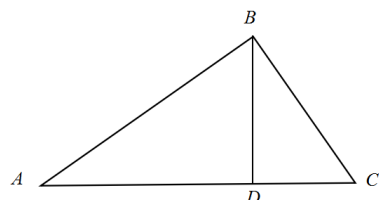
②相似三角形对应高的比，对应中线的比与对应角平分线的比都等于相似比 .

③相似三角形周长的比等于相似比， 面积的比等于相似比的平方.

(4)相似的应用.

①三角形中位线. 连结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线，三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.

②相似经常使用在直角三角形中！如图： $\triangle ABD \sim \triangle ACB \sim \triangle CBD$



例题精练

1. 下列各组数中能组成三角形的是（ ）

- A. 1, 2, 3 B. 2, 2, 4 C. 1, 1, 3 D. 4, 4, 9 E. 3, 4, 5

【答案】E.

解析：

根据三角形的性质：“三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边”，对照四个选项：

A. $1+2=3$, B. $2+2=4$, C. $1+1<3$, D. $4+4<9$, 只有 E 选项上面两条原则都满足，而且这是一个直角三角形（3, 4, 5 是我们最熟悉的勾股数）

2. 等腰三角形的三条边中有两条长度是 2 和 4，则该三角形的周长是（ ）.

- A. 8 B. 10 C. 8 或 10 D. 12 E. 16

【答案】B.

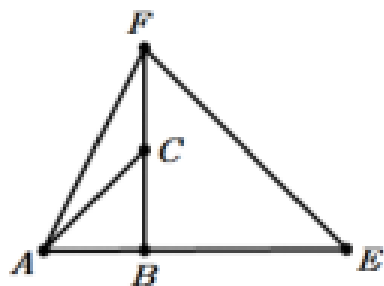
解析:

三角形有两种可能, 第一种, 2, 2, 4, 但这时 $2+2=4$, 不构成三角形.

第二种可能, 4, 4, 2, 满足三角形的性质: “三角形两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边”. 所以该三角形的周长是 $4+4+2=10$, 选 B.

3. 如图所示, 已知 $AE=3AB$, $BF=2BC$, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 2, 则 $\triangle AEF$ 的面积为 ()

- A. 14 B. 12 C. 10 D. 8 E. 6



【答案】B. .

解析:

本题考查三角形面积的重要结论 “两三角形同底, 面积比即为高的比” 和

“两三角形同高, 面积比即为底边的比” .

根据这个结论可得: (1) $S_{\triangle ABF} = 2S_{\triangle ABC} = 4$ (两个三角形同底 AB , 高比为 $BF:BC = 2:1$),

(2) $S_{\triangle AEF} = 3S_{\triangle ABF}$ (三角形 ABF 和三角形 AEF 高相等, 底的比为 $AE:AB = 3:1$)

$$\Rightarrow S_{\triangle AFE} = 12$$

故 $\triangle AEF$ 面积为 12.

4. 在直角三角形中，若斜边与一直角边的和是 8，差是 2，则另一条直角边的长度是()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 10 E. 9

【答案】B.

解析:设直角三角形的斜边为 c ，直角边为 a, b ，则根据已知可列式， $a + c = 8, a - c = 2$ ，

解方程组得： $c = 5, a = 3$ ，所以利用勾股定理， $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 4$ （或直接根据勾股数

3, 4, 5，直接可得另一条直角边为 4）。

5. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $AB=6, BC=8$ ，则斜边 AC 上的高是()。

- A. 4 B. 4.8 C. 5 D. 10 E. 9.6

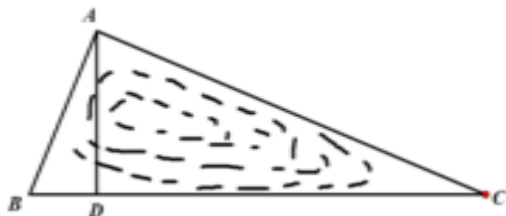
【答案】B.

解析:

设 $Rt\triangle ABC$ 中，斜边 AC 上的高为 h ，则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} AC \times h$

利用勾股定理 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$ 。带入上式，可得 $h = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{6 \times 8}{10} = 4.8$

6. 如图，在直角三角形 ABC 区域内部有座山，现计划从 BC 边上某点 D 开凿一条隧道到点 A ，要求隧道长度最短，已知 AB 长为 $5km$ ， AC 长为 $12km$ ，则所开凿的隧道 AD 的长度约为()。



- A. 4.12km B. 4.22km C. 4.42km
D. 4.62km E. 4.92km

【答案】D.

7. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $AB=5$, $AC=7$, $BC=4$, 已知 $\triangle DEF$ 中最短边是12, 则 $\triangle DEF$ 的周长是().

- A. 48 B. 10 C. 15 D. 20 E. 15

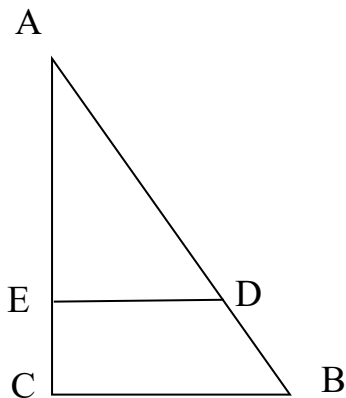
【答案】A.

解析:

因为 $AB=5km$, $AC=12km$, 所以 $BC=13km$ (常用勾股数: 5, 12, 13) 由

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \times AD = \frac{1}{2} AB \times AC$, 即 $AB \times AC = AD \times BC$, 计算可得 AD 约等于 $4.62km$.

8. 如图, 在直角三角形 ABC 中, $AC=4$, $BC=3$, $DE \parallel BC$, 已知梯形 $BCED$ 的面积为3, 则 DE 的长为()



- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}+1$ C. $4\sqrt{3}-4$ D. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ E. $\sqrt{2}+1$

【答案】D.

解析:

由已知, $DE \parallel BC$ 可得 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, 因此 $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB} \Rightarrow \frac{AE}{4} = \frac{DE}{3} \Rightarrow DE = \frac{3AE}{4}$,

又 $S_{\text{梯形}BCDE} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 - \frac{1}{2} \times AE \times DE = 3$, 得 $AE \times DE = 6$, 代入 $DE = \frac{3AE}{4}$

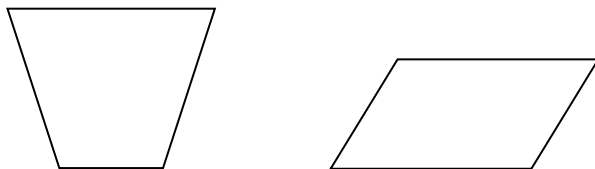
则 $DE^2 = \frac{18}{4}$, 解得 $DE = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, 选 D.

第二节 四边形

知识精讲

一、四边形的内角和等于 360° ;

多边形内角和定理. n 边形的内角的和等于 $(n-2) \times 180^\circ$.



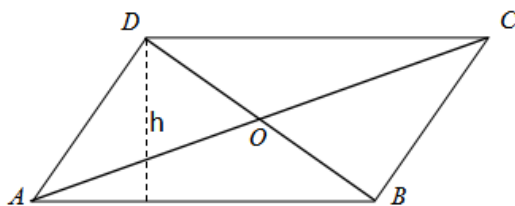
二、平行四边形的性质.

(1) 平行四边形的定义. 两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形.

(2) 平行四边形的性质.

A. 平行四边形的对边平行且相等, 对角相等;

B. 平行四边形的对角线互相平分.



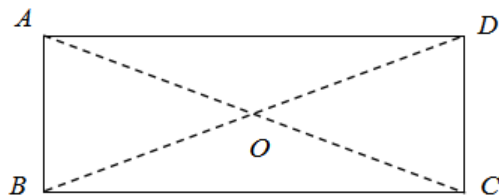
(3) 若平行四边形两边长是 a , b , 以 b 为底边的高为 h , 则面积为 $S = bh$, 周长

$$l = 2(a + b).$$

三、特殊的平行四边形.

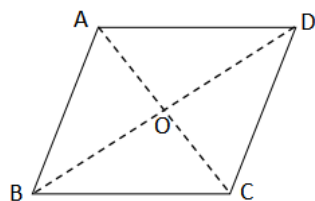
(1) 矩形. 有一个角是直角的平行四边形是矩形.

对角线相等; 面积 $S = ab$.

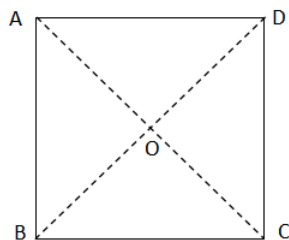


(2) 菱形. 有一组邻边相等的平行四边形是菱形.

对角线垂直且每一条对角线平分一组对角; 注. 菱形的对角线把菱形分成四个全等的直角三角形. 面积 $S = \frac{1}{2} l_1 \times l_2$, 即为两条对角线乘积的一半.



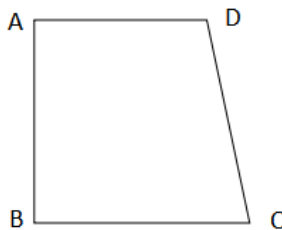
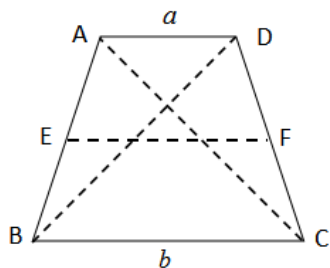
(3) 正方形. 既是矩形, 又是菱形.



四. 梯形

一组对边平行, 另一组对边不平行的四边形.

设梯形的上底为 a , 下底为 b , 高为 h , 则中位线 $= \frac{1}{2}(a + b)$, 面积为 $s = \frac{1}{2}(a + b)h$.



等腰梯形:两腰相等的梯形叫做等腰梯形.

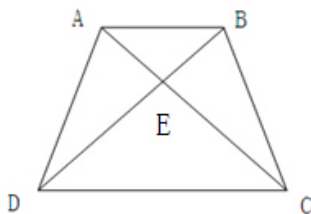
a. 对角线相等的梯形 $\Leftrightarrow$ 等腰梯形;

b. 在同一底上的两个底角相等的梯形 $\Leftrightarrow$ 等腰梯形.

直角梯形: 一腰垂直于底的梯形叫做直角梯形.

例题精练

1. 如图所示,在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 与 AB 与 CD 的边长分别为 4 和 8. 若 $\triangle ABE$ 的面积为 4, 则四边形 $ABCD$ 的面积为 ()



- A. 24 B. 30 C. 32 D. 36 E. 40

【答案】D.

解析: 本题考查三角形面积的重要结论“两三角形同底, 面积比即为高的比”和

“两三角形同高, 面积比即为底边的比”.

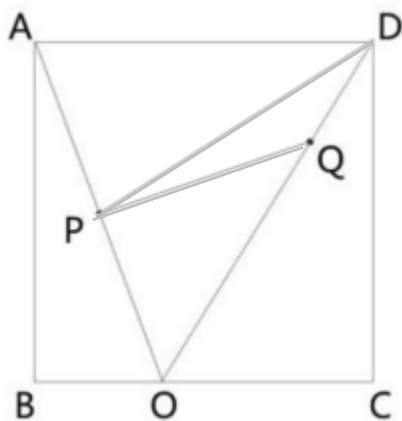
由 $AB \parallel CD$, 可得内错角 $\angle BAC = \angle ECD$, 结合对顶角 $\angle AEB = \angle CED$, $\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle CDE$, 所以

$$AE:EC = BE:ED = AB:CD = 4:8 = 1:2.$$

根据“两三角形同高, 面积比即为底边的比”, 可知: $S_{\triangle ADE} = 2S_{\triangle ABE} = 8$, $S_{\triangle ACD} = 3S_{\triangle AED} = 24$,

$S_{\triangle ACF}=3S_{\triangle AEB}=12$, 所以四边形 $ABCD$ 的面积为 $S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ACF}=36$.

2. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 面积, O 为 BC 上的一点, P 为 AO 上的中点, Q 为 DO 上的一点, 则能确定三角形 PQD 的面积.



(1) O 为 BC 的三等分点

(2) Q 为 DO 的三等分点

【答案】B

解析:

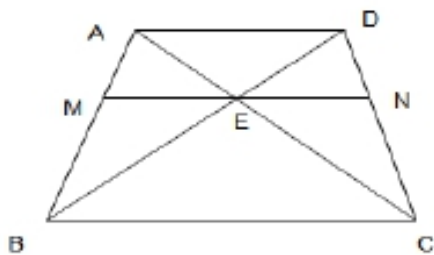
已知正方形的面积, 对于 $\triangle AOD$, 过 O 点做 AD 的垂线, 垂线段的长度始终等于 CD 的长.

所以只要 O 点在 BC 上, 位置无论在哪里, $\triangle AOD$ 面积都为正方形面积的一半, 所以条件

(1) 无用. 根据结论“两三角形同高, 面积比即为底边的比”, P 是 AO 中点, 则 $\triangle DOP$ 面积是 $\triangle AOD$ 面积的一半. 而 Q 是 DO 的三等分点, 可知 $\triangle PQD$ 与 $\triangle DOP$ 的高相同 (P 为顶点, QD 或者 OD 为底边的高), $QD = \frac{1}{3} OD$, 所以 $\triangle PQD$ 的面积是 $\triangle DOP$ 面积的 $\frac{1}{3}$.

所以条件 (2) 充分, 选 B

3. 如图, 梯形 $ABCD$ 的上底与下底分别为 5 和 7, E 为 AC 与 BD 的交点, MN 过点 E 且平行于 AD , 则 $MN = ()$



- A. $\frac{26}{5}$ B. $\frac{11}{2}$ C. $\frac{35}{6}$ D. $\frac{36}{7}$ E. $\frac{40}{7}$

【答案】C.

解析:

由平行可以得出同位角、内错角相等，这样我们可以得到数对相似三角形.

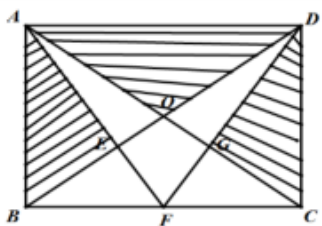
由于 $\triangle AED \sim \triangle CEB$ ，所以 $AD:CB = AE:CE = DE:BE = 5:7$;

又 $\triangle AME \sim \triangle ABC$ ，所以 $ME:BC = AE:AC = 5:12$ ($AE:CE = 5:7$ ，设 $AE=5k$, $CE=7k$,

则 $AC=12k$, 所以 $AE:AC = 5:12$) $\Rightarrow ME = \frac{35}{12}$

同理可得 $EN = \frac{35}{12}$, 则 $MN = \frac{35}{6}$, 故选 C.

4. 如图，长方形 $ABCD$ 的两边分别为 $8m$ 和 $6m$ ，四边形 $OEFG$ 的面积是 $4m^2$ ，则阴影部分的面积为 () .



- A. $32m^2$ B. $28m^2$ C. $24m^2$ D. $20m^2$ E. $16m^2$

【答案】B

解析:

由于三角形 ABF 面积与三角形 DBF 面积相等（同底等高），所以三角形 ABE 面积与三角形 DEF 面积相等，所以阴影部分面积

$$S_{\text{阴影}} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle CGD} + S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AOD} + S_{\triangle CGD} + S_{\triangle DEF} = S_{\triangle ACD} + S_{\text{四边形} OEFG} = 24 + 4 = 28$$

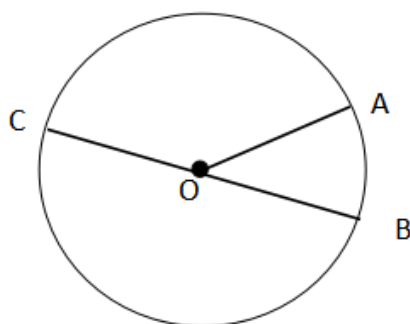
第三节 圆与扇形

知识精讲

一、圆

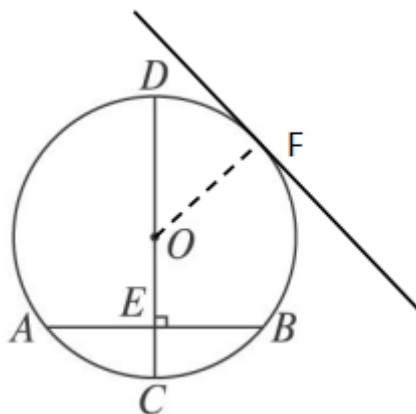
（1）圆的定义. 圆是到定点的距离等于定长的点的集合；

（2）周长为 $C = 2\pi R$ ，面积是 $S = \pi R^2$ ；



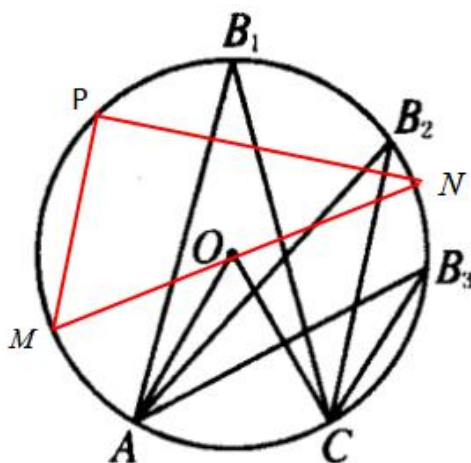
（3）切线的性质. 圆的切线垂直于经过切点的半径；

（4）垂径定理. 垂直于弦的半径平分弦，且平分弦所对的弧.



直线 l 是圆 O 的切线，切点为 F ，则 $OF \perp l$ ； $OC \perp AB \Leftrightarrow AE=BE$.

(5) 圆周角定理. 同弧所对的圆周角是圆心角的一半，直径所对的圆周角是 90° .



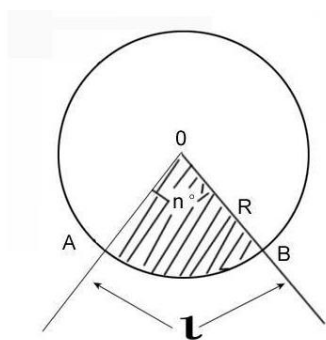
$\angle AB_1C = \angle AB_2C = \angle AB_3C = \frac{1}{2} \angle AOC$; MN 是直径， P 是圆周上任意一点，则 $\angle MPN = 90^\circ$.

二、扇形

(1) 扇形. 一条弧和经过这条弧两端的两条半径所围成的图形叫扇形；

(2) 在扇形 OAB 中，若圆心角为 n° ，则 AB 弧长 $l = \frac{n\pi R}{180}$ ，扇形面积 $S = \frac{n\pi R^2}{360}$

(3) 2π 弧度 $= 360^\circ$.



例题精练

1. 圆的半径是 5 厘米，一条弦长 8 厘米，那么弦心距是 () 厘米.

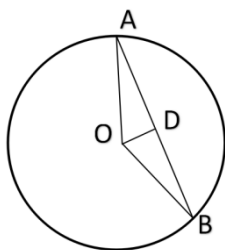
- A. 2 B. 3 C. 4 D. $2\sqrt{3}$ E. $2\sqrt{2}$

【答案】B.

解析:

过圆心 O 做垂线, 垂直于弦 AB , 如图 $OD \perp AB$, 根据垂径定理, $DA = DB = \frac{1}{2}AB = 4$. 所以

在 $RT\triangle AOD$ 中, 由 $OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, 选 B



2. 扇形的半径是 4, 圆心角是 90° , 则扇形的面积是 ().

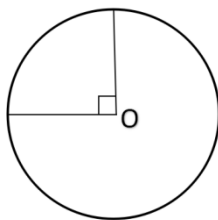
- A. 16π B. 12π C. 8π D. 4π E. 2π

【答案】D.

解析:

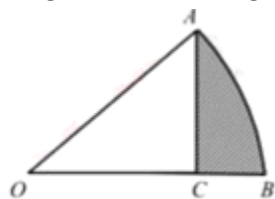
方法一: 直接根据扇形面积公式, $S = \frac{n \cdot \pi r^2}{360} = \frac{1}{4} \pi \cdot 16 = 4\pi$.

方法二: 如图, $S_{\text{圆}} = \pi r^2 = 16\pi$, $S_{\text{半圆}} = 8\pi$, $S_{\text{四分之一圆}} = 4\pi$.



3. 如图, 扇形 AOB 中, $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$, $OA = 1$, AC 垂直于 OB , 则阴影部分的面积为 ()

- A. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ B. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{8}$ C. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ D. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$ E. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}$



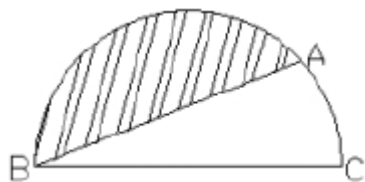
【答案】A.

解析:

在 $RT\triangle AOC$ 中, $\angle OAC = 45^\circ$, 所以 $RT\triangle AOC$ 为等腰直角三角形, $AC = OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{所以 } S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形AOB}} - S_{\triangle AOC} = \frac{45\pi^2}{360} - \frac{1}{2}OC \cdot AC = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

4. 如图, BC 是半圆的直径, 且 $BC = 4$, $\angle ABC = 30^\circ$, 则图中阴影部分的面积为 ()

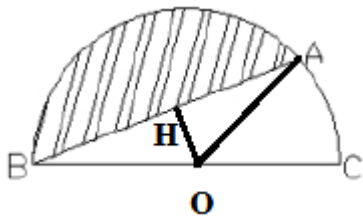


- A. $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ B. $\frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ C. $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$
 D. $\frac{2}{3}\pi + 2\sqrt{3}$ E. $2\pi - 2\sqrt{3}$

【答案】A.

解析:

设圆心为 O , 连接 AO , 做 $OH \perp AB$, 则在等腰三角形 AOB 中, $BH = HA$ (如图)



$BC=4, BO=2, OH=1$ (直角三角形中, 30 度角所对的直角边等于斜边的一半), 所以

$$BH = \sqrt{BO^2 - OH^2} = \sqrt{3}, S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = BH \cdot OH = \sqrt{3}$$

则所求面积 $S = \frac{\pi \cdot 2^2}{3} - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$. 故选 A.

第四节 空间几何

知识精讲

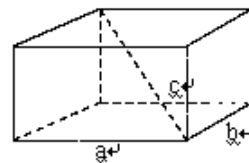
一、长方体

1. 基本概念. 六个面都为矩形, 长方体中的每一个矩形都叫做长方体的面, 面与面相交的

线叫做长方体的棱, 三条棱相交的点叫做长方体的顶点, 相

交于一个顶点的三条棱的长度分别叫做长方体的长. 宽. 高.

当长. 宽. 高都相等时, 称为立方体.



2. 基本公式.

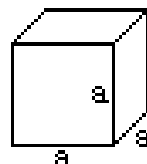
设长方体在同一个顶点上的三条棱长分为 a 、 b 、 c

(1) 体积 $V = abc$

(2) 全面积. $S_{\text{全}} = 2(ab + bc + ac)$

(3) 体对角线. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

(4) 当 $a = b = c$ 时, 称为正方体,

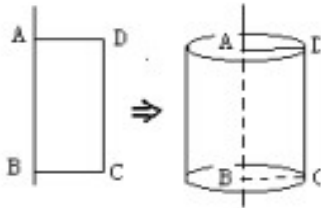


$$V = a^3, S_{\text{全}} = 6a^2, d = \sqrt{3}a$$

二、圆柱

1. 基本概念

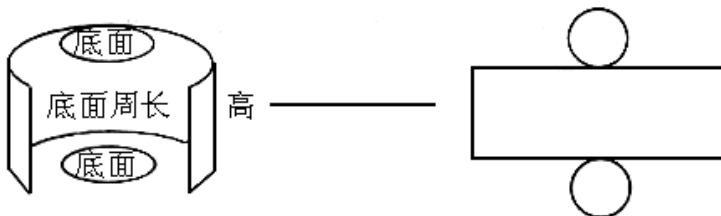
圆柱看作以矩形的一边为旋转轴，将矩形旋转一周形成的曲面所围成的几何体。



2. 圆柱侧面展开图及侧面积

把圆柱一条母线剪开后展开在平面上，就得到它们的侧面展开图。

圆柱的侧面展开图是一个矩形（见下图），矩形的长是底面圆的周长，宽是圆柱的高（即母线长）



3. 基本公式.

设圆柱的高为 h ，底面圆半径是 r ，

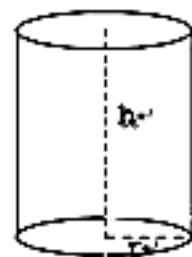
(1) 体积: $V = \pi \cdot r^2 h$

(2) 侧面积: $S_{\text{侧}} = 2\pi \cdot r \cdot h$ (r 为底面圆的半径, h 为圆柱的高)

其侧面展开图为一个长为 $2\pi r$ ，宽为 h 的长方形.

(3) 全面积: $S_{\text{全}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{上底+下底}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$

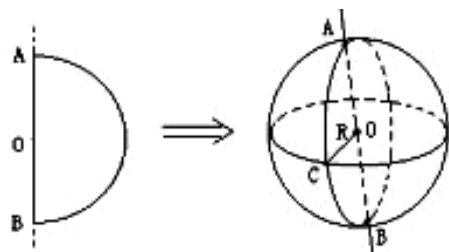
易错点. 圆柱的有两个底面，计算圆柱的全面积时需要注意.



三、球体

1. 球的概念

半圆以它的直径为旋转轴，旋转而成的曲面叫做球面，球面所围成的几何体叫做球体，简称球. 其中半圆的圆心叫做球的球心，连结球心和球面上任意一点的线段叫做球的半径，连结球面上两点并且经过球心的线段叫做球的直径.



2. 基本公式. 设球的半径为 R .

(1) 球的表面积公式: $S_{\text{表}} = 4\pi R^2$.

(2) 球的体积公式: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

例题精练

1. 若一个长方体的表面积是 22，所有棱长之和为 24，则长方体的对角线长 ()

- A. $\sqrt{14}$ B. $\sqrt{12}$ C. $2\sqrt{133}$ D. $2\sqrt{122}$ E. $\sqrt{35}$

【答案】A.

解析:

设长方体长宽高分别为 a, b, c ;

则由表面积可列式 $2(ab + ac + bc) = 22$;

所有棱长之和 $4(a + b + c) = 24, a + b + c = 6$;

体对角线 $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(a + b + c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc} = \sqrt{36 - 22} = \sqrt{14}$;

故选 A.

2. 压路机的前轮是圆柱体，轮宽 1.5 米，直径 1.2 米，前轮每分钟转动 10 周，则每分钟前进（ ）米.

- A. 6π B. 8π C. 10π D. 12π E. 以上都不正确

【答案】D.

解析：

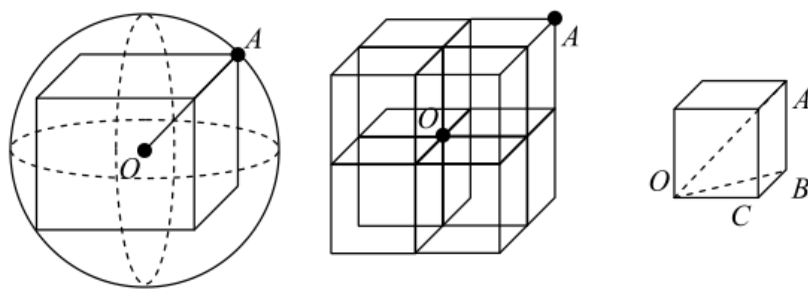
压路机前轮转动一周，前进 $2\pi r = 1.2\pi$ ，所以每分钟前进 $l = 10 \times 2\pi = 12\pi$ ，故选 D.

3. 现有一个半径为 R 的球体，拟用刨床将其加工成正方体，则能加工成的最大正方体的体积是（ ）.

- A. $\frac{8}{3}R^3$ B. $\frac{8\sqrt{3}}{9}R^3$ C. $\frac{4}{3}R^3$ D. $\frac{1}{3}R^3$ E. $\frac{\sqrt{3}}{9}R^3$

【答案】B.

解析：



设正方体的边长为 a ，如图可知， $OC = BC = AB = \frac{a}{2}$ ，则

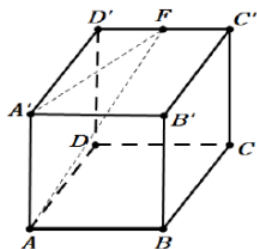
$$OA = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}a, \text{ 球体的半径为 } R, \text{ 即 } \sqrt{\frac{3}{4}}a = R,$$

$$\text{则 } a = \sqrt{\frac{4}{3}}R, \text{ 所以 } V = \left(\sqrt{\frac{4}{3}}R\right)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9}R^3.$$

故选 B.

4. 下图正方体的棱长为 2, F 是棱 $C'D'$ 的中点, 则 AF 的长为 ().

- A. 3 B. 5 C. $\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{2}$ E. $2\sqrt{3}$



【答案】A.

解析:

三角形 $AA'F$ 为直角三角形, 又 $A'F = \sqrt{5}$, $AF = \sqrt{5+4} = 3$.

故选 A.

5. 将体积为 $4\pi\text{cm}^3$ 和 $32\pi\text{cm}^3$ 的两个实心金属球溶化后铸成一个实心大球, 则大球的表面积是 ()

- A. $32\pi\text{cm}^2$ B. $36\pi\text{cm}^2$ C. $38\pi\text{cm}^2$ D. $40\pi\text{cm}^2$ E. $42\pi\text{cm}^2$

【答案】B.

解析:

设实心大球的半径为 R , 根据熔铸后大球体积等于两个实心小球体积.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 32\pi + 4\pi = 36\pi \text{ cm}^3.$$

解得 $R=3$, 表面积 $S = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$.

第五节 平面解析几何

知识精讲

一.两点之间距离公式

在平面直角坐标系中, 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

二.中点坐标公式

点 $P(x, y)$ 是线段 P_1P_2 的中点, 其中 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 则 P 点坐标为

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

三. 直线的倾斜角与斜率

(1) 直线的倾斜角. 一条直线 l 向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角, 叫做这条直

线的倾斜角. 特殊地, 当直线 l 和 x 轴平行时, 倾斜角为 0° , 故倾角. $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$.

(2) 直线的斜率. 倾斜角不是 90° 的直线的倾斜角的正切叫做此直线的斜率. 直线的斜率反映了直线对 x 轴的倾斜程度.

直线的斜率常用 k 表示, 即 $k = \tan \alpha$. 注意. 垂直于 x 轴的直线没有斜率 ($\alpha \neq 90^\circ$).

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 直线的斜率不存在;

(3) 过两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 的直线的斜率公式. $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_1 \neq x_2)$.

四.直线的方程

(1) 斜截式. $y = kx + b$, 斜率为 k , 在 y 轴上的截距为 b .

注意. 它不含垂直于 x 轴的直线.

(2) 一般式. $Ax + By + C = 0$ (其中 A, B 不同时为 0). 斜率为. $-\frac{A}{B}$

五.两直线的位置关系

设不重合的两条直线为 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$

(1) 相交.

会求交点. 联立 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ 有唯一一组实数解。

(2) 平行.

① 若 $l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2; l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$

② 若 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0. l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

(3) 垂直.

① 若 $l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2; l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1$

② 若 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0. l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0;$

六.点到直线的距离公式

平面内一点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离公式 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

七.点线之间的对称问题

(1) 点关于特殊直线的对称点.

设点 $P(x_0, y_0)$ 是直角坐标系内任意一点, 则点 $P(x_0, y_0)$

① 关于 x 轴的对称点为 $(x_0, -y_0)$;

② 关于 y 轴的对称点为 $(-x_0, y_0)$

③ 关于原点的对称点为 $(-x_0, -y_0)$

④ 关于直线 $y = x$ 的对称点为 (y_0, x_0)

⑤关于直线关于直线 $y = -x$ 的对称点为 $(-y_0, -x_0)$

(2) 求已知点关于某已知直线的对称点

点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $Ax + By + C = 0$ 的对称点为 (x_1, y_1) , 则 (x_1, y_1) 是方程组

$$\begin{cases} A \cdot \frac{x_0 + x_1}{2} + B \cdot \frac{y_0 + y_1}{2} + C = 0 \\ \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot \left(-\frac{A}{B}\right) = -1 \end{cases} \quad \text{的解.}$$

注. 这个方程的求解比较复杂, 但考试都是单选题, 考试中两点关于直线对称的问题, 通常只需要验证两点连线垂直于对称轴即可 (即斜率乘积等于-1), 而不需要解这个方程.

八. 圆的两种方程

(1). 圆的标准方程. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ($r > 0$), 称为圆的标准方程, 其圆心坐标为 (a, b) , 半径为 r . 特别地, 当圆心在原点 $(0, 0)$, 半径为 r 时, 圆的方程为 $x^2 + y^2 = r^2$.

注. 求圆的标准方程一般只需要熟悉以下三个式子即可.

$$x^2 \pm 2x + 1 = (x \pm 1)^2, \quad x^2 \pm 4x + 4 = (x \pm 2)^2, \quad x^2 \pm 6x + 9 = (x \pm 3)^2$$

(2). 圆的一般方程. $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ($D^2 + E^2 - 4F > 0$), 其圆心坐标为 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$, 半径为 $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$. 当 $D^2 + E^2 - 4F = 0$ 时, 方程表示一个点 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$; 当 $D^2 + E^2 - 4F < 0$ 时, 方程不表示任何图形.

九. 点和圆、直线和圆、圆和圆的位置关系

1. 点 $P(x_0, y_0)$ 与圆的位置关系.

(1) 对于圆的标准方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, 若 $d = \sqrt{(a-x_0)^2 + (b-y_0)^2}$,

则有. $d > r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆外; $d = r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆上; $d < r \Leftrightarrow$ 点 P 在圆内.

(2) 对于圆的一般方程. $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 则有.

$$x_0^2 + y_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F < 0 \Leftrightarrow \text{点} P \text{在圆内};$$

$$x_0^2 + y_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F = 0 \Leftrightarrow \text{点} P \text{在圆上};$$

$$x_0^2 + y_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F > 0 \Leftrightarrow \text{点} P \text{在圆外}.$$

2. 直线与圆的位置关系有三种. (本质是求点到直线的距离)

直线 $Ax + By + C = 0$ 与圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 的位置关系.

$$(1) \text{ 圆心到直线的距离. } d = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

$$d > r \Leftrightarrow \text{相离}; \quad d = r \Leftrightarrow \text{相切}; \quad d < r \Leftrightarrow \text{相交}$$

3. 圆与圆的位置关系有五种. (本质是求两点之间距离)

设两圆圆心分别为 O_1, O_2 , 半径分别为 r_1, r_2 . $|O_1O_2| = d$

$$d > r_1 + r_2 \Leftrightarrow \text{外离} \Leftrightarrow 4 \text{条公切线}; \quad d = r_1 + r_2 \Leftrightarrow \text{外切} \Leftrightarrow 3 \text{条公切线};$$

$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2 \Leftrightarrow \text{相交} \Leftrightarrow 2 \text{条公切线}; \quad d = |r_1 - r_2| \Leftrightarrow \text{内切} \Leftrightarrow 1 \text{条公切线};$$

$$0 \leq d < |r_1 - r_2| \Leftrightarrow \text{内含} \Leftrightarrow \text{无公切线}$$

注. 考试常考① “两个圆相切——圆心距等于半径之和. 或者半径之差”

考试常考② “两个圆有交点——圆心距大于等于半径之差. 且小于等于半径之和”

分析两圆位置关系的解题步骤.

(1) 根据两圆方程确定两圆圆心, 以及两圆半径.

(2) 根据两点间距离公式求出两圆圆心距, 分析圆心距与两圆半径之间的大小关系.

例题精练

1. 平面直角坐标系中点 A (3, 4), B (6, 0), 则线段 AB = ().

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 以上都不对

【答案】D.

解析:

直接考察两点间距离公式:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(3-6)^2 + (4-0)^2} = 5, \text{ 选 } D$$

2. 经过点 A (-3, -4), 点 B (-1, 0) 的直线 AB 斜率 $k = ()$.

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$ E. 以上都不对

【答案】A.

解析:

$$\text{根据斜率公式 } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-4)}{-1 - (-3)} = \frac{4}{2} = 2$$

3. 直线 $x + 2y + 2 = 0$ 和直线 $kx + y + 3 = 0$ 垂直, 则 $k = ()$.

- A. 2 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. -2 E. 无法确定

【答案】D.

解析:

两条直线垂直, 斜率相乘等于-1, 即斜率互为负倒数. $x + 2y + 2 = 0$ 化成标准形式, $y = -\frac{1}{2}x - 1$

斜率是 $-\frac{1}{2}$;而 $kx+y+3=0$ 化成标准形式, $y=-kx-3$,斜率是 k , $-\frac{1}{2} \times (-k)=-1$ 所以 $k=-2$,

故选 D.

4. 直线 $y=3x+2$ 和直线 $y=kx+3$ 平行, 则 $k=(\quad)$.

- A. 2 B. -3 C. 3 D. -2 E. 无法确定

定

【答案】C.

解析:

两直线平行, 斜率相等, 即 x 的系数相等, 所以 $k=3$.

5. 在平面直角坐标系中点 $(2, 3)$ 到直线 $3x+4y-3=0$ 的距离是 $(\quad)$.

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 2 E. 6

【答案】A.

解析:

本题考察点到直线距离公式的直接运用.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \times 2 + 4 \times 3 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3, \text{ 故选 } A.$$

6. 点 $(0, 4)$ 关于直线 $2x+y+1=0$ 的对称点为 $(\quad)$

- A. $(2, 0)$ B. $(-3, 0)$ C. $(-6, 1)$ D. $(4, 2)$ E. $(-4, 2)$

【答案】E.

解析:

设 $(0, 4)$ 为点 A , 其关于直线 $l: 2x + y + 1 = 0$ 的对称点为 B , 设 B 的坐标为 (m, n)

则我们可以列式的依据有两个: (1) AB 的中点 H 在对称直线 l 上; (2) AB 与 l 垂直.

由 (1), AB 的中点 H 的坐标为 $\left(\frac{0+m}{2}, \frac{4+n}{2}\right)$, H 在对称直线 l 上, 直接将 H 坐标带入

l 方程: $2 \cdot \frac{0+m}{2} + \frac{4+n}{2} + 1 = 0$. 由 (2), $k_{AB}k_l = -1$, $k_{AB}k_l = \frac{4-n}{0-m} \cdot (-2) = -1$, (1) (2)

的两个式子联立可解得 $m = -4, n = 2$. 选 E.

7. 圆的解析式 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$, 圆心的坐标和半径是 ().

A. $(2, -1), 2$ B. $(2, 1), 2$ C. $(-2, 1), 2$ D. $(-2, -1), 2$ E.

以上都不对

【答案】C.

解析:

本题考察圆的标准方程式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, 圆心为 (a, b) , 半径为 r

对应上面的知识点, 圆心的坐标 $(-2, 1)$, 半径是 2, 故选 C.

8. 圆的解析式 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$, 点 $A(3, 1)$, 则点 A 与圆的位置关系是 ().

A. 点在圆内 B. 点在圆外 C. 点在圆上 D. 点与圆心重合 E. 以上都

不对

【答案】B.

解析:

判断点与圆的位置关系，只需判断点到圆心的距离 d 和 r 的大小的比较， $d > r$ 点在圆外， $d < r$ 点在圆内， $d = r$ 点在圆上。（或者直接将点的坐标代入圆的方程左侧，判断数值与 r^2 的大小）。
 本题，圆心 $(2, -1)$ 到圆心的距离为 $d = \sqrt{(3-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{5} > 2 = r$ ， $d > r$ ，所以，点在圆外，故选 B 。

9. 圆 $x^2 + y^2 - ax - by + c = 0$ 与 x 轴相切，则能确定 c 的值。

(1) 已知 a 的值。 (2) 已知 b 的值。

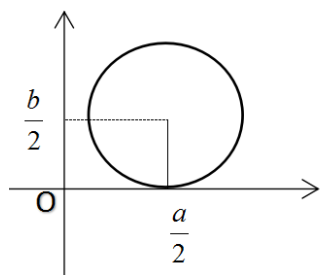
【答案】A.

解析：

将圆方程化成标准形式，配方得到 $(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - c = r^2$ ，由圆与 x 轴相切

可知圆心到 x 轴距离等于圆的半径，即 $|\frac{b}{2}| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4} - c}$ ，整理得： $\frac{a^2}{4} = c$

由此我们可得，要确定 c 值只需要 a 值即可。所以条件 (1) 充分，条件 (2) 不充分。



10. 已知圆 A. $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ ，则圆 B 与圆 A 相切，

(1) 圆 B. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$; 圆 B. $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

【答案】A.

解析：

两圆相切，有两种可能，一是内切，二是外切. 内切的时候两圆的圆心距等于半径的差，外切的时候两圆的圆心距等于半径的和.

圆 A . $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ ，化为标准式. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$ ，圆心 $O_1(-2, -1)$ ，半径 $r_1 = 2$ ；

条件 (1). 化为标准式 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$ ，圆心 $O_2(1, 3)$ ，半径 $r_2 = 3$ ；

$O_1O_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ， $r_1 + r_2 = 5$ ， $O_1O_2 = r_1 + r_2$ ，则两圆外切，充分.

条件 (2). 化为标准式 $(x-3)^2 + y^2 = 9$ ，圆心 $O_3(3, 0)$ ，半径 $r_3 = 3$ ；

$O_1O_3 = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$ ， $r_1 + r_2 = 5$ ， $O_1O_3 > r_1 + r_2$ ，则两圆外离，不充分.

条件 (1) 充分，条件 (2) 不充分，故选 A .

第七章 数据分析

第一节 排列组合

知识精讲

一、计数原理

1.1 分类加法原理

引例：一个人从 A 地前往 B 地，火车有两班次，汽车有三班次，则他的行程选择有 $2+3=5$ 种。

由此我们给出分类加法计数原理：

若完成一件事有两类不同的方案，在第 1 类方案中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类方案中有 m_2 种不同的方法，则完成这件事共有 $N = m_1 + m_2$ 种不同的方法。

同理，有 n 个方案的分类加法计数原理公式为： $N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 。

1.2 分步乘法原理

引例：一个人从 A 地前往 B 地，火车有两班次 p_1 、 p_2 ，再从 B 地前往 C 地，火车有三班次 q_1 、 q_2 、 q_3 ，则他从 A 地经由 B 地，到达 C 地的行程选择穷举出来分别是：

(p_1, q_1) 、 (p_1, q_2) 、 (p_1, q_3) 、 (p_2, q_1) 、 (p_2, q_2) 、 (p_2, q_3) ，共 6 种。用乘法计算即为 $2 \times 3 = 6$ 种。

由此我们给出分步乘法计数原理：

若完成一件事需要两个步骤，做第 1 步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法，则完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2$ 种不同的方法。

同理， n 个步骤的乘法原理公式为： $N = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ 。

【注意】类与类相加，步与步相乘.

二、排列与排列数

2.1 排列与排列数

排列的定义：从个不同元素 n 中，任意取出 $m(m \leq n)$ 个元素，按照一定顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列，记作 P_n^m ，其中：

$$P_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)$$

通常用以下方法记忆：

$P_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)$ 是从 n 开始，由大到小共 m 个数相乘

例如 P_6^4 是从 6 开始，由大到小共 4 个数相乘， $P_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3$

例：从 3 个人 A 、 B 、 C 中挑选出 2 个人站成一排，则可能的情况数为： $P_3^2 = 3 \times 2 = 6$ 。

穷举出来分别是： AB 、 BA 、 AC 、 CA 、 BC 、 CB 共有 6 种可能。

2.2 排列数公式

当 $m = n$ 时：

$$P_n^n = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

称为 n 的全排列，用 $n!$ 表示， $n!$ 读作 n 的阶乘，即 $P_n^n = n!$

三、组合与组合数

3.1 组合与组合数

从 n 个不同元素中，任意取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的种数，称为从 n 个不同元素中

取出 m 个不同元素的组合数，记作 C_n^m ，其中：

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

通常用以下方法计算：

$$C_n^m = \frac{n \times (n-1) \times \cdots}{1 \times 2 \times \cdots} \text{ 分子由大到小共 } m \text{ 个相乘，分母由大到小共 } m \text{ 个相乘}$$

例：从 3 个人 A、B、C 中挑选出 2 个人去参加某比赛，则总的情况数为： $C_3^2 = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$

穷举出来分别是：AB、BC、AC 共有 3 种可能. 和排列的区别是选出来的两个人没有先后或者左右的顺序.

3.2 组合数公式

(1) 从 n 个元素中取出 m 个元素为一组的同时，另外 $n-m$ 个元素自动组合在了一起，所以，两种组合的组合数是相等的，有：

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$\text{例如：} C_4^1 = C_4^3$$

(2) 从 n 个元素中取出 n 个元素，只有 1 种组合方式，再结合公式 (1)，有：

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

四、二项式定理

二项式定理用来研究 $(a+b)^n$ 的展开式. 该公式为：

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

其中第 $r+1$ 项的通式为： $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

我们以前学过的和的立方公式： $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ，也可以用二项式定理来

推导出： $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

特别的，当 $a=b=1$ 时，有 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ 。

例题精练

1. 假设 M 点到 N 点可以坐火车 3 班、飞机 2 班、轮船 2 班，共有 m 种方式； A 点到 B 点要经过 C 点， A 到 C 有火车 3 班， C 到 B 有 2 班飞机， A 到 B 共有 n 种方式，则 m 和 n 分别为（ ）

A. 7 和 6 B. 6 和 7 C. 7 和 7 D. 6 和 6 E. 以上都不对

【答案】A.

解析：

分类加法原理： $m = 3 + 2 + 2 = 7$

分步乘法原理： $n = 3 \times 2 = 6$

所以 m 和 n 分别为 7 和 6，选 A

2. 一个人从 A 地前往 B 地，再从 B 地返回 A 地，两地之间有 2 趟火车和 3 趟长途客车，请问他的行程选择有（ ）种。

A. 10 B. 12 C. 24 D. 25 E. 36

【答案】D.

解析：

先分类，在分步： $(2+3) \times (2+3) = 25$

3. 某店铺经营 10 种商品，每天在货架上摆放 4 种，如果每天摆放的商品都不完全相同，则最多可摆放（ ）天.

A. 200 B. 210 C. 400 D. 5040 E. 10000

【答案】B.

解析：题目相当于问从 10 个商品中选 4 种的不同组合数

$$C_{10}^4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210, \text{ 故选 } B$$

4. 甲乙丙丁四个人坐成一排，不同的排列方法有（ ）种.

A. 12 B. 18 C. 24 D. 48 E. 以上都不对

【答案】C.

解析：

根据排列的概念： $P_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ，故选 C

5. 有 6 个不同的奖项，颁发给 8 个候选人，每个奖项的获得者只限一人，每人最多获 1 个奖项，不同的获奖结果有（ ）种.

A. C_6^6 B. P_8^6 C. P_6^5 D. P_8^8 E. 无法计算

【答案】B.

解析：

题意相当于从 8 个元素中选出 6 个按照一定次序排列，所以是 P_8^6 ，选 B

6. 计算 $C_6^6 \cdot C_6^3$ 的结果是（ ）.

A. 21600 B. 1800 C. 600 D. 300 E. 20

【答案】E.

解析:

$$C_6^6 \cdot C_6^3 = 1 \cdot \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20, \text{ 故选 } E$$

7. 现从管理专业 5 名、经济专业 4 名和会计专业 3 名学生中随机派出一个 3 人小组, 则该小组 3 个专业各有 1 名学生的情况有 () 种.

A. 20 B. 40 C. 60 D. 80 E. 100

【答案】C.

解析:

分步乘法原理: $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 60$, 故选 C

8. $(ax+b)^6$ 的展开式中, x^2 的系数是 ().

A. $10a^2b^4$ B. $10a^4b^2$ C. $15a^2b^4$ D. $15a^4b^2$ E. $20a^2b^4$

【答案】C.

解析:

根据二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

x^2 应该是倒数第三项 $C_n^{n-2} a^2 b^{n-2}$, 即 $C_6^4 (ax)^2 b^4 = C_6^2 a^2 b^4 \cdot x^2 = 15a^2 b^4 \cdot x^2$, 故选 C

五、排列组合常见题型

1、简单排列组合问题, 以及加法原理和乘法原理的应用

重点: 1. 分清是分类还是分布

2. 分清是排列还是组合

例 1: 某公司员工义务献血, 在体检合格的人中, O 型血的有 10 人, A 型血的有 5 人, B 型血的有 8 人, AB 型血的有 3 人, 若从四种血型的人中各选 1 人去献血, 则不同的选法种数有 ().

A. 1200 B. 600 C. 400 D. 300 E. 26

【答案】A.

解析: 乘法原理: $10 \times 5 \times 8 \times 3 = 1200$

故选 A.

例 2: 平面上有 5 条平行直线, 与另一组 n 条平行直线垂直, 若两组平行线共构成 280 个矩形, 则 $n =$ ().

A. 5 B. 6 C. 2 D. 8 E. 9

【答案】D.

解析:

两组平行直线共构成 280 个矩形, 即需要在 5 条平行直线中选取两根直线, 然后在另一组平行直线中选取两根直线。并且构成矩形的过程, 不需要选取后排序。故用组合数进行运算:

有 $C_5^2 \cdot C_n^2 = 280$, 解得 $n = 8$

故选 D.

例 3: 公路 AB 上各站之间共有 90 种不同的车票.

(1) 公路 AB 上有 10 个车站, 每两站之间都有往返车票;

(2) 公路 AB 上有 9 个车站, 每两站之间都有往返车票.

【答案】A.

解析:

条件（1），公路 AB 上有 10 个车站，每两站之间都有往返车票，

则各站之间票的种数为 $2C_{10}^2 = 90$ ，条件（1）充分。

条件（2）中，同理可得到各站之间票的种数为 $2C_9^2 = 72$ ，条件（2）不充分。

故选 A.

例 4：现有 3 名男生和 2 名女生参加面试，则面试的排序法有 24 种.

（1）第一位面试的是女生；

（2）第二位面试的是指定的某位男生.

【答案】A.

解析：

条件（1）：第一位面试为女生（2 选 1），其余全排列，则有：

$$C_2^1 \cdot P_4^4 = 48, \text{ 不充分；}$$

条件（2）第二位面试是指定某位男生，其余四人全排列，则有

$$P_4^4 = 24, \text{ 充分；}$$

条件（1）不充分，条件（2）充分，

故选 B.

2、住店问题

原理： n 个不同的人去住进 m 个店，每个人都有 m 种选择，则总共住法总数是 m^n 种。

重点：谁选谁。

例 1：有 5 人报名参加 3 项不同的培训，每人都只报一项，则不同的报法有（ ）.

A. 243 种 B. 125 种 C. 81 种 D. 60 种 E. 以上选项均不正确

【答案】A.

解析：

住店原理： $3^5 = 243$ ，故选 A.

例 2: 3 个人争夺 4 项比赛的冠军, 没有并列冠军, 则不同的夺冠可能有 () 种.

A. 64 B. 81 C. 12 D. 6 E. 以上选项均不正确

【答案】B.

解析:

住店原理: 3^4 , 故选 B.

3、有限制条件的排列组合问题

这类题型一般有下面几种类型:

- ①. 要求某些元素“在哪里”或“不在哪里”的排列、组合问题.
- ②. 要求某些元素“相邻”或“不相邻”的排列、组合问题.
- ③. 要求某些位置有某元素“占据”或“不占据”的排列、组合问题.

这类题型常用的解题方法有:

(1) 优先法 (特殊位置优先或特殊元素优先)

对元素或位置有特殊要求的排列组合问题, 可以先从特殊元素或特殊位置着手, 先解决特殊元素或特殊位置, 再考虑其他元素或位置.

(2) **捆绑法**—相邻问题, 把相邻的 k 个元素看作一个元素与其它元素排列, 然后再考虑 k 个元素排列.

(3) **插空法**—不相邻 (相间) 问题

首先将不受限制条件的元素排列起来, 然后再在每两个元素之间 (含这些元素的两端) 插入不能排在一起的元素.

(4) **排除法**—从总体中排除不符合条件的方法数.

例: 甲、乙、丙、丁、戊、己 6 人排队, 则在以下各要求下, 各有多少种不同的排队方法?

请依次计算。

- (1) 甲不在排头;
- (2) 甲乙两人相邻;
- (3) 甲乙两人不相邻;
- (4) 甲始终在乙的前面 (可相邻也可不相邻)

【答案: (1) 600; (2) 240; (3) 480; (4) 360】

解析:

(1) 甲是特殊元素, 先排甲: C_5^1 ;

其余人全排列: P_5^5 ;

$$C_5^1 \cdot P_5^5 = 600;$$

(2) 甲乙两人捆绑, 内部可以排列: $P_2^2 = 2$;

捆绑之后和其余 4 人排列: $P_5^5 = 120$

$$2 \times 120 = 240$$

(3) 6 个人全排列: $P_6^6 = 720$;

甲乙两人相邻的排列种数是 240;

则甲乙不相邻的排列种数: $720 - 240 = 480$

(4) 6 个人全排列: $P_6^6 = 720$;

6 人排队的情形中, 甲乙的位置只有 2 种: 要么甲在乙前, 要么甲在乙后;

则甲始终在乙的前面有: $720 \div 2 = 360$

4、数字问题

例: 从 0, 1, 2, 3, 4, 5 中取出 4 个数字, 组成 4 位数, 在以下要求时, 各组组成多少个不同的数字?

(1) 组成可以有重复数字的 4 位数;

(2) 组成无重复数字的 4 位数;

(3) 组成无重复数字的 4 位偶数;

(4) 组成无重复数字的 4 位奇数;

【答案: (1) 1080; (2) 300; (3) 156; (4) 144; 】

解析:

(1) 千位: C_5^1 ; 百位: C_6^1 ; 十位: C_6^1 ; 个位: C_6^1 ;

组成可以有重复数字的 4 位数: $C_5^1 \cdot C_6^1 \cdot C_6^1 \cdot C_6^1 = 1080$;

(2) 千位: C_5^1 ; 百位: C_4^1 ; 十位: C_4^1 ; 个位: C_3^1 ;

组成无重复数字的 4 位数: $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 300$;

(3) 个位为 0 时: 其余 3 位全排列: $C_5^3 \cdot P_3^3 = 60$;

个位为 2 时, 千位: C_4^1 ; 百位: C_4^1 ; 十位: C_3^1 ; $C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 48$

个位为 4 时, 千位: C_4^1 ; 百位: C_4^1 ; 十位: C_3^1 ; $C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 48$

组成无重复数字的 4 位偶数: $60+48+48=156$;

(4) 组成无重复数字的 4 位数: 300 个; 组成无重复数字的 4 位偶数: 156 个;

则组成无重复数字的 4 位奇数: $300-156=144$;

5、均匀与不均匀分组问题(分组与分堆问题)

(1) 均匀分组与不均匀分组

如果组与组之间的元素个数相同, 称为均匀分组; 否则, 称为不均匀分组。

(2) 小组有名称或小组无名称

只是简单地分组即可, 不考虑组别关系, 则小组无名称(定义为“分堆问题”)

如果分为 A 组, B 组, C 组, 或者种子队, 非种子队等等, 则小组有名称。

★★★重点: 如果均匀分组, 并且无名称, 需要消序(消序即: 要除以堆数的全排列)

其余情况均不需要消序!!

例: 从 10 个人中选一些人, 分成三组, 在以下要求下, 分别有多少种不同的方法?

(1) 每组人数分别为 2、3、4;

(2) 每组人数分别为 2、2、3;

(3) 分成 A 组 2 人, B 组 3 人, C 组 4 人;

(4) 分成 A 组 2 人, B 组 2 人, C 组 3 人;

【答案: (1) 12600; (2) 12600; (3) 12600; (4) 25200; (5) 75600; (6) 75600; 】

解析:

$$(1) C_{10}^2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^4 = 12600;$$

$$(2) \text{出现了 2 组别是 2 人, 均匀无名称要消序: } \frac{C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^3}{P_2^2} = 12600;$$

$$(3) C_{10}^2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^4 = 12600$$

$$(4) C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot C_6^3 = 25200$$

6、不同元素分组问题——先分组再分配

例: 某大学派出 5 名志愿者到西部 4 所中学支教, 若每所中学至少有一名志愿者, 则不同的分配方案共有 () 种.

A. 240 B. 144 C. 120 D. 60 E. 24

【答案】 A

解析: 先从 5 名志愿者中选出 2 人, 有 C_5^2 种选法;

将这二人看成一个整体，与另外三人进行排列；

所以不同的分配方案共有 $C_5^2 4! = 240$ 种，故选 A.

7、相同元素分组问题——隔板法

例 1: 若将 10 只相同的球随机放入编号为 1, 2, 3, 4 的四个盒子中, 则每个盒子不空的投放方法有()种.

- A. 72 B. 84 C. 96 D. 108 E. 120

【答案】B

解析:相同元素分组，采用隔板法：10 个小球，9 个空，插入 3 个板，

则每个盒子不空的投放方法有： $C_9^3 = 84$ ， 故选 B.

例 2: 若将 10 只相同的球随机放入编号为 1、2、3、4 的四个盒子中，则不同的投放方法有()种.

- A. 172 B. 84 C. 296 D. 108 E. 286

【答案】E

解析:

相同元素分组，采用隔板法：10 个小球，全部放入一个盒子： $C_4^1 = 4$ ；

放入两个盒子： $C_4^2 \cdot C_9^1 = 54$ ；放入三个盒子： $C_4^3 \cdot C_9^2 = 144$ ；

放入四个盒子： $C_4^4 \cdot C_9^3 = 84$ ； $4 + 54 + 144 + 84 = 286$ ；

故选 E.

8、乱序配对问题（不能对号入座的问题）

【解题提示】 n 个编号为 $1 \sim n$ 的球放入 n 个编号为 $1 \sim n$ 的盒子中，每个盒子中放一个球，

若球盒编号不配对，则不同的放法有：

n	2	3	4	5
不配对放法总数	1	2	9	44

例 1：某单位决定对 4 个部门的经理进行轮岗，要求每位经理必须轮换到 4 个部门中的其他部门任职，则不同的方案有（ ）。

A. 3 种 B. 6 种 C. 8 种 D. 9 种 E. 10 种

【答案】 D.

解析：

错排问题；

四个元素不对号入座排法：9 种方案。

例 2：设有编号为 1，2，3，4，5 的 5 个小球和编号为 1，2，3，4，5 的 5 个盒子，现将这 5 个小球放入这 5 个盒子内，要求每个盒子内放一个球，且恰好有 2 个球的编号与盒子的编号相同，则这样的投放方法的总数有多少种？

【答案】 20.

解析：

恰好有 2 个球的编号与盒子的编号相同： $C_5^2 = 10$ ；

其余 3 个小球错排，不对号入座：2 种方案；

则 $10 \times 2 = 20$ ；

第二节 概率初步

知识精讲

一、基本概念：

1 概率的定义

概率，它是反映随机事件出现的可能性大小. 随机事件是指在相同条件下，可能出现也可能不出现的事件. 事件 A 出现的概率，常用 $P(A)$ 表示.

2 概率的性质：

$$(1) 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$(2) P(\phi) = 0 \quad (\text{空集 } \phi \text{ 指不可能事件})$$

$$(3) P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad (\bar{A} \text{ 指的是 } A \text{ 的对立事件, 即 “} A \text{ 不发生”})$$

【注意】一件事的概率等于零，即 $P(A) = 0$ ，但 A 未必是不可能事件.

二、古典概型

1 什么是古典概型？

做一个随机试验，如果具有如下两个特征：

(1) 有限性特征：样本空间由有限个基本事件构成

(2) 等可能性特征：每个基本事件发生的可能性相等

那么我们就称这个随机试验为古典概型试验. 最常见的古典概型的例子：抛硬币、投骰子、抓阄等.

2 计算公式

$$P(A) = \frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件的个数}}{\text{样本空间中基本事件的总个数}}$$

例：在 10 件商品中有 3 件一等品，从这 10 件商品中随机抽取一件，没有抽到一等品的概率是多少？

我们设“没抽到一等品”这个事件为 A 事件，则事件 A 包含了 $10-3=7$ 个事件，而基本事件的总个数是 10 个，所以没有抽到一等品的概率是 $P(A) = \frac{7}{10} = 0.7$ 。

三、独立事件

如果事件 A 发生（或不发生）与事件 B 发生（或不发生）是互不影响的，那么我们就把 A 事件和 B 事件称为相互独立的事件，并且 A 和 B 同时发生的概率是 A 发生的概率乘以 B 发生的概率，即：

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

例：甲乙两人同时射击一个飞盘，甲射中的概率是 0.7，乙射中的概率也是 0.7，那么，

（1）飞盘被甲乙同时射中的概率是多少？（2）飞盘被射中的概率是多少？

甲乙射中两个事件是独立事件，设这两个事件分别为事件 A 和事件 B。

(1) 飞盘被甲乙同时射中的概率是 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \times 0.7 = 0.49$

(2) 设飞盘被射中这个事件为事件 C，则事件 C 有三种可能：甲乙同时射中、甲射中乙没射中、乙射中而甲没射中，所以

$$P(C) = P(A) \cdot P(B) + P(\bar{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\bar{B}) = 0.7 \times 0.7 + 0.3 \times 0.7 + 0.7 \times 0.3 = 0.91$$

我们也可用另一种简单的方法来做，事件 C 飞盘被射中的对立事件是飞盘未被射中，而飞盘未被射中

等价于甲乙同时都没有射中，所以可得：

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 1 - 0.3 \times 0.3 = 0.91$$

四、贝努利概型

4.1 独立重复试验

如果一个试验可以在相同条件下重复进行，并且每一次之间都是独立事件，那么我们把这样的试验称为“独立重复试验”，如果我们重复进行 n 次这样的试验，就叫做 n 次独立重复试验，记作 P_n 。

4.2 贝努利公式

如果独立重复试验中一次试验中事件 A 发生的概率是 P ，那么 n 次重复试验中这个事件发生 k 次的概率记作 $P_n(k)$ ：

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

例：一个骰子抛 5 次，则其中 1 点向上出现 2 次的概率是 $P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3$ ，

骰子共 6 个面，所以单独一次，1 点向上的概率是 $\frac{1}{6}$ ； C_5^2 表示从抛的 5 次里面选出来 2 次 1 点向上，而这两次一点向上的概率都是 $\frac{1}{6}$ ；其余 3 次，不是一点向上，概率是 $\left(\frac{5}{6}\right)^3$ 。

例题 3.

某次考试共有 3 道题，只要有 2 道题正确就可以及格，假设某人答对每 1 道题的概率都是 0.8，那么他及格的概率是多少？

A. 0.384 B. 0.512 C. 0.648 D. 0.896

例题精练

1. 盒子中放了 5 个不同颜色的小球，其中黑色、白色、红色、绿色各一个，另一个是黑白红绿四色彩球，现在从中任取 2 球，其中恰好都有绿色的概率为（ ）。

A. 5% B. 10% C. 20% D. 40% E. 50%

【答案】B.

解析：

古典概型，5 个小球当中有 2 个小球有绿色，所以 $P_{(\text{两个绿色})} = \frac{1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$ ，故选 B

2. 从 5 名管理专业，4 名经济学专业和 1 名会计专业的学生中随机的选择 3 人一组，则

该小组中的 3 个人专业各不相同的概率为（ ）

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$ E. $\frac{1}{6}$

【答案】E.

解析：

总的样本是 $C_{10}^3 = 120$ 个

每个专业各选一人的情况有 $C_5^1 C_4^1 C_1^1 = 20$ 个

所以，概率是 $\frac{C_5^1 C_4^1 C_1^1 = 20}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$ ，故选 E

3. 信封中有 10 张奖券，只有 1 张有奖，从信封中同时抽取 2 张奖券，中奖的概率记作 P ；

从信封中每次抽取 1 张奖券后放回，如此重复抽取 n 次，中奖的概率记作 Q 。则有 $P < Q$

(1) $n=2$ (2) $n=3$

【答案】B.

解析：

本题考查古典概型和伯努利公式：

$$(1) P = \frac{C_9^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{5}, Q = 1 - \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = 0.19 < P, \text{ 条件 (1) 不充分}$$

$$(2) P = \frac{C_9^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{5}, Q = 1 - \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = 0.271 > P, \text{ 条件 (2) 充分}$$

故选 B

4. 若先后投掷两枚骰子，以得到的点数 a 与 b 作为点 M 的坐标，则点 M 落在 $x^2 + y^2 = 18$ 内的概率是 ()

A. $\frac{7}{36}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{5}{18}$ E. $\frac{11}{36}$

【答案】D.

解析：

本题考查古典概型

样本空间中总的点有 $C_6^1 \times C_6^1 = 36$ 个

其中符合条件的点集包含 $(1, 1)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(1, 3)$ 、 $(1, 4)$ 、 $(2, 1)$ 、 $(2, 2)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(3, 1)$ 、 $(3, 2)$ 、 $(4, 1)$ 共计 10 个点，所以 $P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ ，故选 D

5. 从编号为 1 到 10 的 10 张卡片中随机抽取 2 张，它们的标号之和能被 5 整除的概率为 ()

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{2}{15}$ E. $\frac{7}{45}$

【答案】A.

解析：

本题考察古典概型，可以使用穷举法

能被整除的情况有 $1+4, 1+9, 2+3, 2+8, 3+7, 4+6, 5+10, 6+9, 7+8$ 共 9 种情况.

$$P = \frac{9}{C_{10}^2} = \frac{1}{5}, \text{ 故选 } A$$

第三节 数据分析

知识精讲

一、众数、中位数

众数

数据中出现次数最多的数叫作众数.

中位数

当数据个数 n 为奇数时，把数据按照大小顺序排列，则第 $\frac{n+1}{2}$ 个数为中位数

当数据个数 n 为偶数时，把数据按照大小顺序排列，则第 $\frac{n}{2}$ 个和第 $\frac{n}{2}+1$ 个数的均值是中位数

二、方差和标准差

方差

方差是在概率论和统计方差衡量随机变量或一组数据时离散程度的度量. 方差是一组数据中

每个数据与平均值的差值的平方和再取平均:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

方差用来衡量数据波动的大小，或者叫离散程度的大小。

注：考试经常让我们比较两组数据方差的大小，由于方差表示数据波动的大小，所以很多时候不要求出方差也能根据数据的波动大小看出方差的大小，例：

数据①：1, 3, 5, 7, 9. 数据②：2, 3, 4, 5, 6. 显然数据①的波动比数据②的波动更大，所以数据①的方差更大。

标准差

由于方差的单位与数据的单位不同，并且方差是一个平方值，一定程度上夸大了离散的程度，因此引入了方差的平方根，即标准差的概念。

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

标准差是衡量一组数据离散程度的常用表达形式。

三、统计图表

例题 1. 某人在同一观众群体中调查了 5 部电影的看法，得到了如下的数据：

电影	第一部	第二部	第三部	第四部	第五部
好评率	0.25	0.5	0.3	0.8	0.4
差评率	0.75	0.5	0.7	0.2	0.6

据此数据，观众意见分歧最大的两部电影一次是（ ）

- A. 第一部、第三部
- B. 第二部、第三部
- C. 第二部、第五部
- D. 第四部、第一部

E. 第四部、第二部

【答案】C.

解析:

考察对数据的离散程度“方差”的概念的理解

观众给出的“好评”和“差评”如果有明确的倾向，说明分歧并不大.

相反分歧较大的情况是“好评”和“差评”数量比较接近.

可见，分歧最大的是第二部，其次是第五部，故选 C

例题 2

食堂里有三种菜品，价格分别是 2 元、3 元、4 元，饼状图显示了某日的菜品销售情况，那么这一天食堂消费菜品的平均价格和众数分别是（ ）.

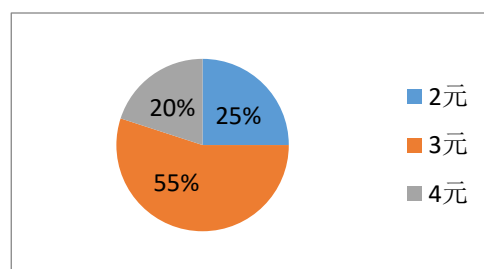
A. 2.95 元，3 元

B. 2.95， 4 元

C. 3 元，4 元

D. 3 元，3 元

E. 4 元，4 元



【答案】A.

解析:

考察众数和均值的概念

由题意可得，众数是占比 55% 的“3 元”

平均价格 $\bar{P} = \frac{2 \times 0.25 + 3 \times 0.55 + 4 \times 0.2}{1} = 2.95$ 元，故选 A

例题精练

1. 一组数据: 3, 3, 4, 5, 6, 9 的方差是 ().

- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{29}{6}$ C. $\frac{26}{3}$ D. $\frac{17}{6}$ E. $\frac{13}{3}$

【答案】E.

解析:

$$\text{先求平均值 } \bar{a} = \frac{3+3+4+5+6+9}{6} = 5$$

$$S^2 = \frac{1}{6}[(3-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (9-5)^2] = \frac{13}{3}, \text{ 故选 } E$$

2. 甲、乙、丙三个地区的公务员参加一次测评, 其人数和考分情况如下表:

	6 分	7 分	8 分	9 分
甲	10 人	10 人	10 人	10 人
乙	15 人	15 人	10 人	20 人
丙	10 人	10 人	15 人	15 人

三个地区按平均分由高到低的排名顺序为 ()

- A: 乙、丙、甲 B: 乙、甲、丙 C: 甲、丙、乙
D: 丙、甲、乙 E: 丙、乙、甲

【答案】E.

解析:

$$\text{甲的平均分} = \frac{6 \times 10 + 7 \times 10 + 8 \times 10 + 9 \times 10}{40} = 7.5$$

$$\text{乙的平均分} = \frac{6 \times 15 + 7 \times 15 + 8 \times 10 + 9 \times 20}{60} = 7.58$$

$$\text{丙的平均分} = \frac{6 \times 10 + 7 \times 10 + 8 \times 15 + 9 \times 15}{50} = 7.7$$

则丙 > 乙 > 甲, 故选 E

3. 甲、乙、丙三人每轮各投篮 10 次，投了三轮，投中数如下表：

	第一轮	第二轮	第三轮
甲	2	5	8
乙	5	2	5
丙	8	4	9

σ_1 、 σ_3 、 σ_2 分别为甲、乙、丙投中数的方差，则 ()

A. $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ B. $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$ C. $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3$ D. $\sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1$ E.

$\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$

【答案】B.

解析：

分别计算甲、乙、丙方差，并比较大小：

$$\bar{x}_{\text{甲}} = 5, \quad \sigma_1 = \frac{(2-5)^2 + (5-5)^2 + (8-5)^2}{3} = 6 \quad \bar{x}_{\text{乙}} = 4,$$

$$\sigma_2 = \frac{(5-4)^2 + (2-4)^2 + (5-4)^2}{3} = 2$$

$$\bar{x}_{\text{丙}} = 7, \quad \sigma_3 = \frac{(8-7)^2 + (4-7)^2 + (9-7)^2}{3} = \frac{14}{3}$$

因此， $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$ ，选 B