信心，坚持 2 小时在线

2024 管理类联考-数学精讲课

第十四讲 排列组合及经典题型

信心，坚持 2 小时在线

第七章 数据分析

第一节 排列组合

知识精讲

一、计数原理

1.1 分类加法原理

引例：一个人从A地前往B地，火车有两班次，汽车有三班次，则他的行程选择有 2+3=5 种.

由此我们给出分类加法计数原理：

若完成一件事有两类不同的方案.在第 1 类方案中有m_1种不同的方法.在第 2 类方案中有m_2种不同的方法.则完成这件事共有$N=m_1+m_2$种不同的方法.

同理，有n个方案的分类加法计数原理公式为：$N=m_1+m_2+...+m_n$.

1.2 分步乘法原理

引例：一个人从A地前往B地，火车有两班次p_1、p_2，再从B地前往C地，火车有三班次q_1、q_2、q_3，则他从A地经由B地，到达C地的行程选择穷举出来分别是：

$(p_1，q_1)$、$(p_1、q_2)$、$(p_1、q_3)$、$(p_2、q_1)$、$(p_2、q_2)$、$(p_2、q_3)$，共6种. 用乘法计算即为$2\times3=6$种.

由此我们给出分步乘法计数原理：

若完成一件事需要两个步骤.做第 1 步有m_1种不同的方法.做第 2 步有m_2种不同的方法.则完成这件事共有$N=m_1\times m_2$种不同的方法.

同理，n个步骤的乘法原理公式为：$N=m_1\times m_2\times\ldots\times m_n$.

【注意】类与类相加，步与步相乘.

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

1. 假设M 点到N点可以坐火车 3 班、飞机 2 班、轮船 2 班，共有m种方式；A点到B点要经过C点，A到C有火车 3 班，C到B有 2 班飞机, A到B共有n种方式，则m和n分别为（　　）

A. 7 和 6　　B. 6 和 7　　C. 7 和 7　　D. 6 和 6　　E. 以上都不对

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

2. 一个人从A地前往B地，再从B地返回A地，两地之间有 2 趟火车和 3 趟长途客车，请问他的行程选择有（　　）种.

A. 10　B. 12　C. 24　D. 25　E. 36

二、排列与排列数

2.1 排列与排列数

排列的定义：从个不同元素n中，任意取出$m(m\leq n)$个元素，按照一定顺序排成一列，称为从n个不同元素中取出m个元素的一个排列，记作P_n^m，其中：$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

通常用以下方法记忆：

$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$是从$n$开始，由大到小共$m$个数相乘

例如P_6^4是从 6 开始，由大到小共 4 个数相乘，$P_6^4=6\times5\times4\times3$

例：从 3 个人A、B、C中挑选出 2 个人站成一排，则可能的情况数为：$P_3^2=3\times2=6$.

穷举出来分别是：AB、BA、AC、CA、BC、CB共有 6 种可能.

信心，坚持 2 小时在线

2.2 排列数公式

当$m=n$时：

$$P_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1$$

称为n的全排列，用$n!$表示，$n!$读作n的阶乘，即$P_n^n=n!$

三、组合与组合数

3.1 组合与组合数

从n个不同元素中，任意取出 $m(m \le n)$个元素的所有组合的种数，称为从n个不同元素中取出m个不同元素的组合数，记作C_n^m，其中:

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^m}{\mathrm{P}_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

通常用以下方法计算：

$C_n^m = \dfrac{n \times (n-1) \times \cdots}{1 \times 2 \times \cdots}$分子由大到小共$m$个相乘，分母由大到小共$m$个相乘

例：从 3 个人A、B、C中挑选出 2 个人去参加某比赛，则总的情况数为：$C_3^2 = \dfrac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$

穷举出来分别是：AB、BC、AC共有 3 种可能. 和排列的区别是选出来的两个人没有先后或者左右的顺序.

3.2 组合数公式

（1） 从n个元素中取出m个元素为一组的同时，另外$n-m$个元素自动组合在了一起，所以，两种组合的组合数是相等的，有：

$$\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$$

例如：$C_4^1=C_4^3$

（2） 从n个元素中取出n个元素，只有 1 种组合方式，再结合公式（1），有：

$$\mathrm{C}_n^0=\mathrm{C}_n^n=1$$

信心，坚持2小时在线

例题精练

3. 计算$C_6^6 \cdot C_6^3$的结果是（　）.

A. 21600　　B. 1800　　C. 600　　D. 300　　E. 20

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

4.某店铺经营 10 种商品，每天在货架上摆放 4 种，如果每天摆放的商品都不完全相同，则最多可摆放（　　）天.

A. 200　B. 210　C. 400　D. 5040　E. 10000

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

5.甲乙丙丁四个人坐成一排，不同的排列方法有（　）种.

A.12　　B.18　　C.24　　D.48　　E.以上都不对

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

6.有 6 个不同的奖项，颁发给 8 个候选人，每个奖项的获得者只限一人，每人最多获 1 个奖项，不同的获奖结果有（　　）种.

A. C_6^6　　B. P_8^6　　C. P_6^5　　D. P_8^8　　E. 无法计算

信心，坚持 2 小时在线

例题精练

7.现从管理专业 5 名、经济专业 4 名和会计专业 3 名学生中随机派出一个 3 人小组，则该小组 3 个专业各有 1 名学生的情况有（　）种.

A. 20　B. 40　C. 60　D. 80　E.100

信心，坚持 2 小时在线

四、二项式定理

二项式定理用来研究$(a+b)^n$的展开式. 该公式为：

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$$

其中第$r+1$项的通式为：$T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$

我们以前学过的和的立方公式：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，也可以用二项式定理来推导出：

$$(a+b)^3=C_3^0a^3+C_3^1a^2b^1+C_3^2a^1b^2+C_3^3b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

特别的，当$a=b=1$时， 有 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$.

信心，坚持2小时在线

五、排列组合常见题型

1、简单排列组合问题，以及加法原理和乘法原理的应用

重点：1.分清是分类还是分布

2.分清是排列还是组合

例1：某公司员工义务献血，在体检合格的人中，O型血的有10人，A型血的有5人，B型血的有8人，AB型血的有3人，若从四种血型的人中各选1人去献血，则不同的选法种数有（　　）.

A.1200　　B.600　　C.400　　D.300　　E.26

信心，坚持 2 小时在线

例 2：平面上有 5 条平行直线，与另一组 n 条平行直线垂直，若两组平行线共构成 280 个矩形，则 n=（　　）.

A. 5　　B. 6　　C. 2　　D. 8　　E. 9

信心，坚持 2 小时在线

例 3：公路 AB 上各站之间共有 90 种不同的车票.

（1）公路 AB 上有 10 个车站，每两站之间都有往返车票；

（2）公路 AB 上有 9 个车站，每两站之间都有往返车票.

A.1 充分 2 不充分；B.1 不充分 2 充分；C.1、2 都不充分，联合后充分；D.1、2 单独都充分；E.1、2 都不充分，联合后也不充分.

信心，坚持 2 小时在线

例 4：现有 3 名男生和 2 名女生参加面试，则面试的排序法有 24 种.

（1）第一位面试的是女生； (2)第二位面试的是指定的某位男生.

A.1 充分 2 不充分；B.1 不充分 2 充分；C.1、2 都不充分，联合后充分；D.1、2 单独都充分；E.1、2 都不充分，联合后也不充分.

信心，坚持 2 小时在线

2、住店问题

原理：n 个不同的人去住进 m 个店，每个人都有 m 种选择，则总共住法总数是 m^n 种。

重点：谁选谁。

例 1：有 5 人报名参加 3 项不同的培训，每人都只报一项，则不同的报法有（　　）.

A. 243 种　　B. 125 种　　C. 81 种　　D. 60 种　　E. 以上选项均不正确

信心，坚持2小时在线

例2：3个人争夺4项比赛的冠军，没有并列冠军，则不同的夺冠可能有（　　）种.

A. 64　　B. 81　　C. 12　　D. 6　　E. 以上选项均不正确

3、有限制条件的排列组合问题

这类题型一般有下面几种类型：

①．要求某些元素“在哪里”或“不在哪里”的排列、组合问题.

②．要求某些元素“相邻”或“不相邻”的排列、组合问题.

③．要求某些位置有某元素“占据”或“不占据”的排列、组合问题.

这类题型常用的解题方法有：

（1）**优先法**（特殊位置优先或特殊元素优先）

对元素或位置有特殊要求的排列组合问题，可以先从特殊元素或特殊位置着手，先解决特殊元素或特殊位置，再考虑其他元素或位置.

（2）**捆绑法**—相邻问题，把相邻 k 个元素看作一个元素与其它元素排列，然后再考虑 k 个元素排列.

（3）**插空法**—不相邻（相间）问题

首先将不受限制条件的元素排列起来，然后再在每两个元素之间（含这些元素的两端）插入不能排在一起的元素.

（4）**排除法**--从总体中排除不符合条件的方法数.

例：甲、乙、丙、丁、戊、己 6 人排队，则在以下各要求下，各有多少种不同的排队方法？请依次计算。

（1）甲不在排头；

（2）甲乙两人相邻；

（3）甲乙两人不相邻；

（4）甲始终在乙的前面（可相邻也可不相邻）

4、数字问题

例：从0，1，2，3，4，5中取出4个数字，组成4位数，在以下要求时，各组组成多少个不同的数字？

（1）组成可以有重复数字的4位数；

（2）组成无重复数字的4位数；

（3）组成无重复数字的4位偶数；

（4）组成无重复数字的4位奇数；

信心，坚持 2 小时在线

5、均匀与不均匀分组问题(分组与分堆问题)

（1）均匀分组与不均匀分组

如果组与组之间的元素个数相同，称为均匀分组；否则，称为不均匀分组。

（2）小组有名称或小组无名称

只是简单地分组即可，不考虑组别关系，则小组无名称（定义为“分堆问题”）

如果分为 A 组，B 组，C 组，或者种子队，非种子队等等，则小组有名称。

★★★重点：如果均匀分组，并且无名称，需要消序（消序即：要除以堆数的全排列）

其余情况均不需要消序!!

信心，坚持 2 小时在线

例：从 10 个人中选一些人，分成三组，在以下要求下，分别有多少种不同的方法？

（1）每组人数分别为 2、3、4；

（2）每组人数分别为 2、2、3；

（3）分成 A 组 2 人，B 组 3 人，C 组 4 人；

（4）分成 A 组 2 人，B 组 2 人，C 组 3 人；

信心，坚持 2 小时在线

6、不同元素分组问题——先分组再分配

例：某大学派出 5 名志愿者到西部 4 所中学支教，若每所中学至少有一名志愿者，则不同的分配方案共有（　　）种.

A. 240　　B. 144　　C. 120　　D. 60　　E. 24

信心，坚持 2 小时在线

7、相同元素分组问题——隔板法

例 1:若将 10 只相同的球随机放入编号为 1,2,3,4 的四个盒子中,则每个盒子不空的投放方法有(　　)种.

A. 72　　B. 84　　C. 96　　D. 108　　E. 120

例 2：若将 10 只相同的球随机放入编号为 1、2、3、4 的四个盒子中，则不同的投放方法有（　　）种.

A. 172　　B. 84　　C. 296　　D. 108　　E. 286

8、乱序配对问题（不能对号入座的问题）

【解题提示】n个编号为1～n的球放入n个编号为1～n的盒子中，每个盒子中放一个球，若球盒编号不配对，则不同的放法有：

n	2	3	4	5
不配对放法总数	1	2	9	44

例1:某单位决定对4个部门的经理进行轮岗,要求每位经理必须轮换到4个部门中的其他部门任职,则不同的方案有（　　）.

A.3种　　B.6种　　C.8种　　D.9种　　E.10种

信心，坚持 2 小时在线

例 2：设有编号为 1，2，3，4，5 的 5 个小球和编号为 1，2，3，4，5 的 5 个盒子，现将这 5 个小球放入这 5 个盒子内，要求每个盒子内放一个球，且恰好有 2 个球的编号与盒子的编号相同，则这样的投放方法的总数有多少种？